

Corso di Laurea in Matematica. Geometria 1. a.a. 2016-17.

Prof. P. Piazza

Alcune osservazioni sulle forme bilineari

1. INFORMAZIONI GENERALI.

Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$ . Sia

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

una forma bilineare. Sia  $V$  di dimensione  $n$  e  $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$  una base di  $V$ . Rimane allora definita la matrice associata a  $b(\cdot, \cdot)$  nella base fissata; per definizione questa è la matrice  $n \times n$

$$A_b^{\mathcal{B}} \equiv (a_{ij}) := (b(\underline{v}_i, \underline{v}_j)).$$

L'espressione della forma bilineare nelle coordinate associate a  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$  è data da

$$(1) \quad b(x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n, y_1 \underline{v}_1 + \dots + y_n \underline{v}_n) = \underline{x}^T A_b^{\mathcal{B}} \underline{y}$$

Equivalentemente:  $b(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{x}^T A_b^{\mathcal{B}} \underline{y}$  se  $\underline{v}$  ha coordinate  $\underline{x}$  e  $\underline{w}$  ha coordinate  $\underline{y}$ . Notiamo che per ogni matrice quadrata  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  si ha

$$\underline{x}^T A \underline{y} = \underline{y}^T A^T \underline{x};$$

infatti  $\underline{x}^T A \underline{y}$  è una matrice  $1 \times 1$  e quindi  $\underline{x}^T A \underline{y} = (\underline{x}^T A \underline{y})^T$  da cui

$$\underline{x}^T A \underline{y} = \underline{y}^T A^T (\underline{x}^T)^T = \underline{y}^T A^T \underline{x}.$$

come si voleva. Vediamo allora che  $b$  è simmetrica se e solo se  $A_b^{\mathcal{B}}$  è simmetrica: infatti, scrivendo l'espressione in coordinate di  $b(\underline{w}, \underline{v})$  otteniamo

$$b(\underline{w}, \underline{v}) = \underline{y}^T A_b^{\mathcal{B}} \underline{x}$$

e questa espressione è uguale a  $\underline{y}^T (A_b^{\mathcal{B}})^T \underline{x} = b(\underline{v}, \underline{w})$  se e solo se  $A_b^{\mathcal{B}} = (A_b^{\mathcal{B}})^T$ . Qui stiamo usando la seguente osservazione: se  $A$  e  $B$  sono due matrici in  $M_{n \times n}(\mathbb{K})$ , allora

$$\underline{x}^T A \underline{y} = \underline{x}^T B \underline{y} \quad \forall \underline{x}, \forall \underline{y} \in \mathbb{K}^n \quad \text{se e solo se} \quad A = B.$$

In una direzione è ovvio; per l'altra basta scegliere  $\underline{x} = \underline{e}_j$  e  $\underline{y} = \underline{e}_k$ , con  $\underline{e}_i$  l' $i$ -mo vettore della base canonica di  $\mathbb{K}^n$ . Con questa particolare scelta è facile verificare che  $\underline{x}^T A \underline{y}$  dà il coefficiente al posto  $(jk)$  della matrice  $A$ ; dall'uguaglianza  $\underline{x}^T A \underline{y} = \underline{x}^T B \underline{y}$  possiamo concludere che  $A$  e  $B$  hanno i coefficienti al posto  $(jk)$  uguali; dato che  $k$  e  $j$  erano arbitrari, possiamo concludere che le matrici sono uguali.

Chiamiamo il membro a destra della (1), l'espressione in coordinate della forma bilineare  $b(\cdot, \cdot)$  nella base  $\mathcal{B}$ .

**Viceversa**, data una matrice  $A = (a_{ij})$  ed una base  $\mathcal{B}$  possiamo definire una forma bilineare  $b_A^{\mathcal{B}} : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  ponendo

$$(2) \quad b_A^{\mathcal{B}}(x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n, y_1 \underline{v}_1 + \dots + y_n \underline{v}_n) := \underline{x}^T A \underline{y}.$$

È facile verificare che  $b_A^{\mathcal{B}}$  è una forma bilineare (vedere il Sernesi). Denoteremo a volte questa forma bilineare con  $b_A$ , omettendo quindi la base  $\mathcal{B}$  dalla notazione.

**Osservazione.** Abbiamo quindi definito una forma bilineare  $b_A^{\mathcal{B}}(\cdot, \cdot)$  ed è facile verificare che la matrice associata a  $b_A^{\mathcal{B}}(\cdot, \cdot)$  nella base fissata  $\mathcal{B}$  è proprio  $A$ . Analogamente, è chiaro che se prendiamo  $A_b^{\mathcal{B}}$  e ne prendiamo la forma bilineare associata tramite (2) allora riotteniamo proprio  $b$ .

Esiste quindi una bigezione fra l'insieme delle forme bilineari su  $V$ ,  $\text{Bil}(V)$ , e l'insieme  $M_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Infatti l'applicazione  $\Phi_{\mathcal{B}} : \text{Bil}(V) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{K})$  definita da

$$\Phi_{\mathcal{B}}(b) := A_b^{\mathcal{B}}$$

ha inversa data da  $\Psi_{\mathcal{B}} : M_{n \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \text{Bil}(V)$

$$\Psi_{\mathcal{B}}(A) = b_A^{\mathcal{B}}.$$

Il fatto che  $\Psi_{\mathcal{B}}(\Phi_{\mathcal{B}}(b)) = b$  e  $\Phi_{\mathcal{B}}(\Psi_{\mathcal{B}}(A)) = A$  segue dall'ultima osservazione. (Di fatto  $\text{Bil}(V)$  ha una naturale struttura di spazio vettoriale e  $\Phi_{\mathcal{B}}$  è un isomorfismo di spazi vettoriali.)

## 2. MATRICI CONGRUENTI

Sia  $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n\}$  un'altra base di  $V$ . Sia  $A_b^{\mathcal{F}}$  la matrice associata a  $b(\cdot, \cdot)$  in questa base. Il vettore generico  $\underline{v}$  ha coordinate  $(x_1, \dots, x_n)$  nella base  $\mathcal{B}$  e coordinate  $(x'_1, \dots, x'_n)$  nella base  $\mathcal{F}$ . Analogamente  $\underline{w}$  ha coordinate  $(y_1, \dots, y_n)$  nella base  $\mathcal{B}$  e coordinate  $(y'_1, \dots, y'_n)$  nella base  $\mathcal{F}$ . Sia  $C$  la matrice del cambiamento di base, dalla base  $\mathcal{B}$  alla base  $\mathcal{F}$ . Vi ricordo, che questa è la matrice invertibile che ha come  $j$ -ma colonna le coordinate di  $\underline{f}_j$  nella base  $\mathcal{B}$ ; abbiamo denotato questa matrice con il simbolo  $M_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(\text{Id}_V)$ . Sappiamo che  $\underline{x} = C\underline{x}'$ ,  $\underline{y} = C\underline{y}'$  e quindi

$$b(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{y}^T A_b^{\mathcal{B}} \underline{x} = (C\underline{y}')^T A_b^{\mathcal{B}} (C\underline{x}') = (\underline{y}')^T (C^T A_b^{\mathcal{B}} C) \underline{x}'$$

da cui deduciamo

$$(\underline{y}')^T (C^T A_b^{\mathcal{B}} C) \underline{x}' = (\underline{y}')^T A_b^{\mathcal{F}} \underline{x}', \quad \forall \underline{x}', \underline{y}'$$

da cui, infine,

$$A_b^{\mathcal{F}} = C^T A_b^{\mathcal{B}} C. \quad \text{con } C = M_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(\text{Id}_V)$$

Diamo ora la seguente

**Definizione.** Due matrici  $A$  e  $D$  sono dette congruenti se esiste una matrice invertibile  $C$  tale che  $D = C^T A C$ .

Da quanto appena visto concludiamo che le matrici associate ad una forma bilineare in due basi diverse sono **congruenti**.

Vale anche il *viceversa*: siano  $A$  e  $D$  due matrici congruenti,  $D = C^T A C$ , con  $C$  invertibile. Sia  $b := b_A^{\mathcal{B}}$  la forma bilineare definita dalla formula (2) nella base  $\mathcal{B}$ . Sia  $\mathcal{F}$  la base che ha come  $j$ -mo vettore quello che ha coordinate, nella base  $\mathcal{B}$ , uguali alla  $j$ -ma colonna di  $C$ ; in formule

$$\underline{f}_j := \sum_k c_{kj} \underline{v}_k.$$

Abbiamo quindi scelto  $\mathcal{F}$  in modo tale che  $C = M_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(\text{Id}_V)$ . Sia  $b_D^{\mathcal{F}}$  la forma bilineare simmetrica definita dalla formula (2) (ma, ovviamente, nelle coordinate associate alla base  $\mathcal{F}$ ). Si ha allora

$$b_A^{\mathcal{B}}(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{y}^T A \underline{x} = (C\underline{y}')^T A (C\underline{x}') = \underline{y}'^T D \underline{x}' = b_D^{\mathcal{F}}(\underline{v}, \underline{w})$$

e quindi  $b_A^{\mathcal{B}}$  e  $b_D^{\mathcal{F}}$  definiscono la stessa forma bilineare:  $b_A^{\mathcal{B}} = b_D^{\mathcal{F}}$ .

In conclusione:

*A e D sono congruenti se e solo se rappresentano la stessa forma bilineare in basi diverse.*

**Proposizione.** *Due matrici congruenti hanno lo stesso rango.*

*Dimostrazione.* Sia  $D = C^T AC$ , con  $C$  invertibile. Osserviamo che se  $A$  è una matrice e  $M$  è una matrice invertibile, allora  $\text{rg}(MA) = \text{rg}(A)$ , perché gli operatori  $L_{MA} = L_M \circ L_A$  e  $L_A$  hanno immagini della stessa dimensione ( $L_M$  è un isomorfismo). Analogamente, se  $N$  è invertibile

$$\text{rg}(AN) = \text{rg}((AN)^T) = \text{rg}(N^T A^T) = \text{rg}(A^T) = \text{rg}A,$$

dove abbiamo utilizzato noti risultati sul rango e il risultato appena dimostrato per giustificare che  $\text{rg}(N^T A^T) = \text{rg}(A^T)$ . In definitiva

$$\text{rg}(C^T AC) = \text{rg}(AC) = \text{rg}A$$

come si voleva.

Possiamo allora definire il rango di una forma bilineare  $b(, )$  come il rango di  $A_b^{\mathcal{B}}$  con  $\mathcal{B}$  una qualsiasi base di  $V$ . La definizione è ben posta per la Proposizione.