Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Diagonalizzazione delle forme bilineari simmetriche

1. Osservazioni preliminari.

Sia V uno spazio vettoriale reale. Sia

$$<\,,\,>: V \times V \to \mathbb{R}$$

un prodotto scalare; per definizione questo vuol dire che $<\,,\,>$ è una forma bilineare simmetrica. Per ragioni tipografiche (e non solo) preferisco utilizzare la notazione $b : V \times V \to \mathbb{R}$ per un arbitrario prodotto scalare $<\,,\,>: V \times V \to \mathbb{R}$: quindi $b(\,,\,) :=<\,,\,>$.

Sia V di dimensione n e $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ una base di V. Rimane allora definita la matrice associata a $b(\,,\,)$ nella base fissata; per definizione questa è la matrice *simmetrica*

$$A^{\mathcal{B}}_b \equiv |a_{ij}| := |b(\underline{v}_j, \underline{v}_i)| \equiv |b(\underline{v}_i, \underline{v}_j)|\,.$$

L'espressione della forma bilineare nelle coordinate associate a $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ è data da

$$(1)\qquad b(x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n\,,\, y_1\underline{v}_1 + \cdots + y_n\underline{v}_n) = |y_1, \ldots, y_n|\, A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \underline{y}^T A\, \underline{x}$$

Questa formula segue facilmente dalla bilinearità e dalla simmetria. Chiamiamo il membro a destra della (1), *l'espressione in coordinate della forma bilineare* $b(\,,\,)$ *nella base* $\mathcal{B}$.
Viceversa, data una matrice *simmetrica* $A = |a_{i\,j}|$ ed una base $\mathcal{B}$ possiamo definire una forma bilineare simmetrica $b^{\mathcal{B}}_A : V \times V \to \mathbb{R}$ ponendo

$$(2)\quad b^{\mathcal{B}}_A(x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n\,,\, y_1\underline{v}_1 + \cdots + y_n\underline{v}_n) := |y_1, \ldots, y_n|\, A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \underline{y}^T A\, \underline{x}$$

Denoteremo quasi sempre questa forma bilineare simmerica con b_A, omettendo quindi la base $\mathcal{B}$ dalla notazione. La verifica che questa applicazione è effettivamente una forma bilineare simmetrica è semplice; era un esercizio per casa e per completezza ecco la soluzione.
La simmetria segue dal fatto che l'espressione $\underline{y}^T A\, \underline{x}$ è simmetrica in $\underline{x}$ e $\underline{y}$; potete fare la verifica in maniera brutale oppure ragionare sul fatto che $\underline{y}^T A\, \underline{x}$ è una matrice 1×1 e che quindi $\underline{y}^T A\, \underline{x} = (\underline{y}^T A\, \underline{x})^T$ da cui

$$\underline{y}^T A\, \underline{x} = \underline{x}^T A^T (\underline{y}^T)^T = \underline{x}^T A \underline{y}$$

come si voleva. Nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'ipotesi ($A = A^T$) ed il fatto generale che la trasposta della trasposta di una matrice è la matrice di partenza.
La bilinearità segue da due semplici osservazioni:
1) se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{x}$ e $\underline{v}'$ ha coordinate $\underline{x}'$ allora $\underline{v} + \underline{v}'$ ha coordinate $\underline{x} + \underline{x}'$ e $\lambda\underline{v}$ ha coordinate $\lambda\underline{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) le proprietà del prodotto righe per colonne, si veda la Proposizione 7.5.
Lascio a voi i dettagli che sono a questo punto banali.

Abbiamo quindi definito una forma bilineare $b_A^{\mathcal{B}}(\, ,\,)$ e si verifica immediatamente che la matrice associata a $b_A^{\mathcal{B}}(\, ,\,)$ nella base fissata $\mathcal{B}$ è proprio A.

Osservazione. (Esistenza di un prodotto scalare definito positivo). Abbiamo definito uno spazio vettoriale metrico come uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare $<\, ,\, >$ definito positivo, tale cioè che $< \underline{v}, \underline{v} >> 0$ per ogni $\underline{v}$ non-nullo. Domanda: ma i prodotti scalari definiti positivi esistono sempre ? La risposta segue da quanto appena visto; fissiamo una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di V e la matrice identità I_n che è certamente simmetrica; consideriamo la forma bilineare (2) con $A = I_n$. Otteniamo una forma bilineare simmetrica $b_{I_n}^{\mathcal{B}}$ che è chiaramente definita positiva, perché se $\underline{v}$ è un vettore non-nullo di coordinate $\underline{x}$ nella base $\mathcal{B}$ allora

$$b_{I_n}^{\mathcal{B}}(\underline{v}, \underline{v}) = \underline{x}^T\, I_n\, \underline{x} = \underline{x}^T\, \underline{x} = (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2.$$

Per costruzione i vettori della base $\mathcal{B}$ sono ortonormali rispetto a questo prodotto scalare definito positivo. In parole: *abbiamo introdotto un prodotto scalare definito positivo in V dichiarando ortonormali i vettori della base $\mathcal{B}$ che avevamo precedentemente fissato.*

2. Matrici congruenti

Sia $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n\}$ un'altra base di V. Sia $A_b^{\mathcal{F}}$ la matrice associata a $b(\, ,\,)$ in questa base. Il vettore generico $\underline{v}$ ha coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ nella base $\mathcal{B}$ e coordinate $(x'_1, \ldots, x'_n)$ nella base $\mathcal{F}$. Analogamente $\underline{w}$ ha coordinate $(y_1, \ldots, y_n)$ nella base $\mathcal{B}$ e coordinate $(y'_1, \ldots, y'_n)$ nella base $\mathcal{F}$. Sia C la matrice del cambiamento di base, dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{F}$. Vi ricordo, che questa è la matrice invertibile che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{f}_j$ nella base $\mathcal{B}$; sappiamo che $\underline{x} = C\underline{x}'$, $\underline{y} = C\underline{y}'$ e quindi

$$b(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{y}^T A_b^{\mathcal{B}}\, \underline{x} = (C\underline{y}')^T A_b^{\mathcal{B}}(C\underline{x}') = (\underline{y}')^T (C^T A_b^{\mathcal{B}} C)\underline{x}'$$

da cui deduciamo

$$(\underline{y}')^T (C^T A_b^{\mathcal{B}} C)\underline{x}' = (\underline{y}')^T A_b^{\mathcal{F}}\, \underline{x}'\, , \quad \forall \underline{x}', \underline{y}'$$

da cui, infine,

$$A_b^{\mathcal{F}} = C^T\, A_b^{\mathcal{B}}\, C\, .$$

Quest'ultimo passaggio è vero perché possiamo scegliere $\underline{x}', \underline{y}'$ arbitrariamente; se scegliete $\underline{x}' = \underline{e}_j$ e $\underline{y}' = \underline{e}_k$, con $\underline{e}_i$ l' i-mo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$, potete concludere che queste due matrici hanno i coefficienti al posto (kj) uguali; dato che k e j erano arbitrari, potete concludere che le matrici sono uguali.
In parole: *le matrici associate ad una forma bilineare simmetrica in due basi diverse sono* **congruenti**. In generale, due matrici A e D sono dette congruenti se esiste una matrice invertibile C tale che $D = C^T AC$.
Viceversa, siano ora A e D due matrici *simmetriche* congruenti, $D = C^T AC$, con C invertibile. Sia b_A la forma bilineare simmetrica definita dalla formula (2) nella base $\mathcal{B}$; sia $\mathcal{F}$ la base che ha come j-mo vettore quello che ha coordinate, nella base $\mathcal{B}$, uguali alla j-ma colonna di C; in formule

$$\underline{f}_j := \sum_k c_{kj} \underline{v}_k\, ;$$

sia b_D la forma bilineare simmetrica definita dalla formula (2) ma nelle coordinate associate alla base $\mathcal{F}$. Si ha allora

$$b_A(\underline{v},\underline{w}) = \underline{y}^T\, A\, \underline{x} = (C\underline{y}')^T\, A(C\underline{x}') = \underline{y}' D\underline{x}' = b_D(\underline{v},\underline{w})$$

e quindi b_A e b_D definiscono la stessa forma bilineare.

Proposizione. *Due matrici congruenti hanno lo stesso rango.*
Dimostrazione. Sia $D = C^T AC$, con C invertibile. Osserviamo che se A è una matrice e M è una matrice invertibile, allora $\mathrm{rg}(MA) = \mathrm{rg}(A)$, perché gli operatori $L_{MA} = L_M \circ L_A$ e L_A hanno immagini della stessa dimensione (L_M è un isomorfismo). Analogamente, se N è invertibile

$$\mathrm{rg}(AN) = \mathrm{rg}((AN)^T) = \mathrm{rg}(N^T A^T) = \mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg} A\,,$$

dove abbiamo utilizzato noti risultati sul rango e il risultato appena dimostrato per giustificare che $\mathrm{rg}(N^T A^T) = \mathrm{rg}(A^T)$. In definitiva

$$\mathrm{rg}(C^T AC) = \mathrm{rg}(AC) = \mathrm{rg} A$$

come si voleva.

Possiamo allora definire il rango di una forma bilineare $b(\,,\,)$ come il rango di $A_b^{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B}$ una qualsiasi base di V. La definizione è ben posta per la Proposizione.

3. Il teorema di Sylvester

In questa sezione utilizzeremo il teorema spettrale per dimostrare il seguente importante

Teorema (Sylvester) *Sia $b(\,,\,)$ una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale V di dimensione n. Sia r il rango di $b(\,,\,)$. Allora esiste un intero positivo ρ, dipendente solo da $b(\,,\,)$, ed una base $\mathcal{F}$ tali che*

$$A_b^{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} I_\rho & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{vmatrix}.$$

I numeri ρ, $r-\rho$ e $n-r$ sono detti rispetttivamente, indice di positività, indice di negatività ed indice di nullità della forma bilineare simmetrica $b(\,,\,)$
Dimostrazione. Consideriamo una qualsiasi base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ e la matrice associata a $b(\,,\,)$ in questa base: $A_b^{\mathcal{B}}$. Questa matrice ha rango r per ipotesi. La denotiamo più semplicemente con A ed i suoi coefficienti li denotiamo a_{ij}. Introduciamo una struttura di spazio vettoriale metrico in V dichiarando la base $\mathcal{B}$ ortonormale; sia $<\,,\,>$ il prodotto scalare definito positivo cosi' ottenuto (vedere la prima sezione). Consideriamo l'operatore $T: V \to V$ definito da

$$T\underline{v}_j := \sum_k a_{kj}\underline{v}_k$$

Per costruzione la matrice associata all'operatore T nella base $\mathcal{B}$ è proprio A. In particolare T ha un nucleo di dimensione $n-r$. Dato che $A = A^T$, perché $b(\,,\,)$ è simmetrica, e dato che $\mathcal{B}$ è ortonormale per il prodotto scalare $<\,,\,>$ che abbiamo definito in V, ne segue che T è un operatore simmetrico. [1] Abbiamo quindi un

[1] Verifichiamolo: se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{x}$ in $\mathcal{B}$ e $\underline{w}$ ha coordinate $\underline{y}$ in $\mathcal{B}$ allora

$$< T\underline{v}, \underline{w} > = < \sum_j x_j T(\underline{v}_j), \sum_\ell y_\ell \underline{v}_\ell > = \sum_{j,\ell} x_j y_\ell < T(\underline{v}_j), \underline{v}_\ell >$$

operatore simmetrico in uno spazio vettoriale metrico; per il teorema spettrale esiste una base *ortonormale* $\mathcal{W} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ costituita da autovettori per T. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_\rho \in \mathbb{R}$ gli autovalori positivi di T. Ci sono allora $r - \rho$ autovalori negativi $\lambda_{\rho+1}, \dots, \lambda_r$; inoltre, come già osservato, l'autovalore 0 ha molteplicità $n - r$. Ordiniamo gli autovalori come sopra, in modo tale cioè che i primi ρ siano positivi, i seguenti $r - \rho$ siano negativi ed i rimanenti $n - r$ siano uguali a zero. Penseremo la base $\mathcal{W}$ ordinata di conseguenza, quindi $\underline{w}_1$ è associato al primo autovalore della nostra lista ordinata e cosi' via. Sia C la matrice del cambiamento di base, dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{W}$: questa è la matrice che ha come colonne le coordinate degli autovettori $\underline{w}_j$ nella base $\mathcal{B}$. Sappiamo che C è ortogonale, $C \in O(n)$, perché entrambe le basi sono ortonormali. Inoltre, $C^{-1}AC = \Lambda$ con Λ la matrice diagonale che ha gli autovalori sulla diagonale principale. Dato che $C \in O(n)$ si ha allora l'importante relazione: $C^T AC = \Lambda$. Ora, da quanto visto nella sezione precedente,

$$A_b^{\mathcal{W}} = C^T AC$$

e quindi, da quanto appena dimostrato, $A_b^{\mathcal{W}} = \Lambda$, che è diagonale. Abbiamo quindi diagonalizzato la forma bilineare; abbiamo cioè trovato una base $\mathcal{W}$ tale che

$$b(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = 0 \ \text{ se } \ i \neq j$$

Consideriamo ora la base $\mathcal{F}$ ottenuta riscalando opportunamente gli autovettori ortonormali; poniamo quindi

$\underline{f}_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\underline{w}_j$ se $1 \leq j \leq \rho$,
$\underline{f}_j = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_j}}\underline{w}_j$ se $j \in \{\rho+1, \dots, r\}$ e
$\underline{f} = \underline{w}_j$ se $r + 1 \leq j \leq n$.
(Questi sono ovviamente ancora autovettori, ma non sono di lunghezza unitaria.)
Si ha:

$b(\underline{f}_\ell, \underline{f}_k) = 0$ per ogni $k \neq \ell$
$b(\underline{f}_j, \underline{f}_j) = 1$ se $1 \leq j \leq \rho$
$b(\underline{f}_j, \underline{f}_j) = -1$ se $j \in \{\rho+1, \dots, r\}$ e
$b(\underline{f}_j, \underline{f}_j) = 0$ se $r + 1 \leq j \leq n$.

È a questo punto chiaro che

$$A_b^{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} I_\rho & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{vmatrix}$$

come si voleva.

Rimane da dimostrare che in questa matrice r e ρ dipendono solo da $b(,)$ e non dalla particolare base scelta. Già sappiamo che r dipende solo da $b(,)$. Sia $\mathcal{A} := \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ un'altra base di V rispetto alla quale $b(,)$ si scriva in forma diagonale. Sia quindi

$$A_b^{\mathcal{A}} = \begin{vmatrix} I_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{vmatrix}.$$

Ma dalla definizione di T e l'ortonormalità di $\mathcal{B}$ segue che $< T(\underline{v}_j), \underline{v}_\ell >= a_{\ell j}$. Quindi $< T\underline{v}, \underline{w} >= \sum_{j,\ell} x_j y_\ell a_{\ell j}$. Scrivendo l'analoga espressione per $< \underline{v}, T\underline{w} >$ e sfruttando il fatto che $A = A^T$ vediamo che $< T\underline{v}, \underline{w} >=< \underline{v}, T\underline{w} >$. Lascio a voi i conti perché sono elementari.

Dobbiamo dimostrare che $\rho = \sigma$. Per assurdo $\rho \neq \sigma$ e supponiamo che sia $\sigma < \rho$. Sia $U = \mathrm{Span}(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_\rho)$ e sia $W = \mathrm{Span}(\underline{a}_{\sigma+1}, \dots, \underline{a}_n)$. Per ipotesi $\dim U + \dim W = \rho + (n - \sigma) > n$ e quindi, per Grassmann, l'intersezione di questi due sottospazi ha dimensione > 0. Sia $\underline{h}$ un vettore non nullo in $U \cap W$; quindi

$$\underline{h} = b_1 \underline{f}_1 + \cdots + b_\rho \underline{f}_\rho \quad \text{perché} \quad \underline{h} \in U$$

e

$$\underline{h} = \beta_{\sigma+1} \underline{a}_{\sigma+1} + \cdots + \beta_n \underline{a}_n \quad \text{perché} \quad \underline{h} \in W.$$

Consideriamo il numero reale $b(\underline{h}, \underline{h})$. Nel primo sistema di coordinate $b(\underline{h}, \underline{h}) = b_1^2 + \cdots + b_\rho^2 > 0$; nel secondo sistema coordinate $b(\underline{h}, \underline{h}) = -\beta_{\sigma+1}^2 - \cdots - \beta_n^2 \leq 0$ e questo è chiaramente assurdo. Il teorema di Sylvester è dimostrato.

Osservazione. Il teorema di Sylvester può anche essere dimostrato direttamente, senza utilizzare il teorema spettrale. Vi rimando ad alcune pagine che avevo scritto per un corso a Matematica:
`http://www.mat.uniroma1.it/people/piazza/051128compl.pdf`

4. Conseguenze del teorema di Sylvester

Innanzitutto, direttamente dal teorema di Sylvester capiamo che una forma bilineare è definita positiva se e solo se $\rho = n$ nella matrice di Sylvester. Infatti, se $b(\, , \,)$ è definita positiva allora per Grahm-Schmidt esiste una base ortonormale, nella quale quindi la forma bilineare ha matrice uguale all'identità. Viceversa, se $\rho = n$ allora nella base $\mathcal{F}$ dell'enunciato del teorema si ha per $\underline{v}$ di coordinate $\underline{x}$, $b(\underline{v}, \underline{v}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ che è maggiore di zero se $\underline{v}$ è non nullo.
In particolare, questo vuol dire che $b(\, , \,)$ è definito positivo se e solo se gli autovalori della matrice simmetrica A, $A = A_b^{\mathcal{B}}$, con $\mathcal{B}$ una qualsiasi base, sono tutti positivi. Per capire il segno degli autovalori (senza calcolarli !) potete applicare il magico *criterio di Cartesio*, che trovate nel libro di testo.

Analogamente, $b(\, , \,)$ è definita negativa se e solo se gli autovalori di A sono tutti minori di zero.

È inoltre chiaro che se il rango di A non è n allora la forma bilineare è degenere e che se esistono due autovalori di segno discorde allora la forma è indefinita. Il messaggio qui è che leggete tutte le proprietà di $b(\, , \,)$ dalla matrice Λ o, equivalentemente dalla forma canonica di Sylvester.

Il caso $V = \mathbb{R}^n$. Consideriamo in particolare $V = \mathbb{R}^n$. Per quanto appena visto, data una forma bilineare $b(\, , \,)$ otteniamo una matrice simmetrica fissando una base. Fissiamo allora la base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$; in tal caso le coordinate di $\underline{x}$ rispetto a $\mathcal{E}$ sono proprio $\underline{x}$ e quindi $b(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}^T A \underline{x}$, con $A = A_b^{\mathcal{E}}$. Viceversa possiamo dare una forma bilineare simmetrica semplicemente assegnando una matrice simmetrica A e considerando

$$b_A(\underline{x}, \underline{y}) := \underline{y}^T A \underline{x} \, ,$$

ed è ovvio che la matrice associata a questa forma bilineare nella base canonica è proprio A.
Conclusione: *le forme bilineari di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole quelle del tipo $\underline{y}^T A \underline{x}$, con A simmetrica.*
Consideriamo allora $b(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}^T A \underline{x}$, con $A = A^T$.

Osservazione: forme bilineari simmetriche e forme quadratiche.
Una forma bilineare in $\mathbb{R}^n$ definisce un polinomio omogeneo di grado 2 nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$; questo è il polinomio

$$\phi(\underline{x}) := \underline{x}^T A\underline{x} = \sum_j a_{jj} x_j^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij} x_i x_j \,.$$

Un tale polinomio è detto *una forma quadratica.* Viceversa, se $\phi(\underline{x})$ è una forma quadratica, cioè un polinomio omogeneo di grado 2 nelle variabili $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$,

$$\phi(\underline{x}) = \sum_j \alpha_{jj} x_j^2 + \sum_{i<j} \alpha_{ij} x_i x_j \,,$$

allora possiamo definire una forma bilineare considerando la matrice simmetrica A_ϕ con coefficienti

$$a_{ii} = \alpha_{ii}\,, \quad a_{ij} = a_{ji} = \frac{\alpha_{ij}}{2} \quad \text{se} \quad i < j$$

e la forma bilineare $b_{A_\phi}(\underline{x}, \underline{y}) := \underline{y}^T A_\phi \underline{x}$. È allora chiaro che la forma bilineare $b_{A_\phi}(\,,\,)$ ha forma quadratica associata precisamente uguale a ϕ; $b_{A_\phi}(\,,\,)$ è detta forma polare di ϕ.

Esempio. In $\mathbb{R}^4$ la forma bilineare simmetrica polare della forma quadratica $x_1^2 - x_2^2 + 2x_3x_4$ è la forma bilineare simmetrica

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_4 + x_4y_3 \,.$$

Quindi *è equivalente parlare di forme quadratiche o di forme bilineari simmetriche*; spesso in alcuni testi si parla quindi di diagonalizzazione delle forme quadratiche.

Fissiamo ora il prodotto scalare canonico. $\mathbb{R}^n$ diviene uno spazio vettoriale metrico e la base canonica $\mathcal{E}$ è ortonormale. Scegliamo questa come base iniziale, quindi $\mathcal{B}$ nella dimostrazione del teorema di Sylvester è proprio $\mathcal{E}$. L'operatore T in questo caso è uguale a L_A (ovvio); da quanto visto $b(\,,\,)$ è definita positiva se e solo se gli autovalori di A sono tutti positivi. Analogamente si procede per definita negativa. Piŭ generale: se esiste un autovalore nullo la forma è degenere, se esistono autovalori non-nulli di segni discordi la forma è indefinita.

Vi faccio notare che nelle coordinate $\underline{z}$ associate ad una base *ortonormale* di autovettori di A con autovalori

$$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_\rho, -\mu_{\rho+1}, -\mu_r, 0, \cdots, 0\}\,, \quad \lambda_j > 0, \mu_\ell > 0$$

la forma quadratica ϕ si "diagonalizza" e si scrive nella forma

$$\lambda_1 z_1^2 + \cdots + \lambda_\rho z_\rho^2 - \mu_{\rho+1} z_{\rho+1}^2 - \cdots - \mu_r z_r^2\,, \quad \lambda_j > 0, \mu_\ell > 0$$

con r uguale al rango di A. Questa è la *forma canonica metrica* della forma quadratica; metrica perché è ottenuta facendo un cambiamento di basi ortonormali (da $\mathcal{E}$ alla base ortonormale di autovettori per L_A), cioè tramite una matrice che è ortogonale. Se vogliamo ammettere cambiamenti di base non-ortogonali allora possiamo ulteriormente modificare la base degli autovettori, come spiegato nella dimostrazione del teorema di Sylvester, riscalandoli opportunamente. Otteniamo in tal modo la *forma canonica affine* della forma quadratica:

$$\zeta_1^2 + \cdots + \zeta_\rho^2 - \zeta_{\rho+1}^2 - \cdots - \zeta_r^2\,.$$

Un esempio di forma quadratica, e quindi di forma bilineare, è dato dal complesso dei termini di grado 2 nello sviluppo di Taylor di una funzione $F \in C^\infty(U)$, U aperto di $\mathbb{R}^n$, attorno ad un punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. I risultati che abbiamo presentato sono particolarmente importanti nello studio del compartamento locale di F in un intorno di un suo punto critico. Vedrete tutto ciò nel corso di Analisi.

Altre applicazioni della forma canonica metrica ed affine sono alla classificazione delle coniche e delle quadriche nel piano e nello spazio affine e nel piano e nello spazio euclideo. La diagonalizzazione delle forme bilineari simmetriche gioca un ruolo fondamentale in molte altre questioni di Matematica e Fisica