Corso di Laurea in Fisica. Corso di Geometria. a.a. 2023-24
Prof. P. Piazza

Brevi appunti di geometria analitica in dimensione 3.

Vi invito a rivedere i teoremi generali sui sistemi lineari, in particolare:

- il teorema di Rouché-Capelli
- il teorema di struttura per sistemi lineari non-omogenei
- il *Teorema degli orlati* che enunciamo qui di seguito [1]

Teorema degli orlati. Sia $A \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ e sia $A(i_1, i_2, \dots, i_r | j_1, j_2, \dots, j_r)$ la sottomatrice quadrata $r \times r$ costituita dagli elementi di A comuni alle righe A_{i_1}, A_{i_2},..., A_{i_r} e alle colonne A^{j_1}, A^{j_2},..., A^{j_r}.
Supponiamo che

$$\det A(i_1, i_2, \dots, i_r | j_1, j_2, \dots, j_r)$$

sia diverso da zero e che il determinante delle sottomatrici quadrate $(r+1)\times(r+1)$ ottenute aggiungendo a $A(i_1, i_2, \dots, i_r | j_1, j_2, \dots, j_r)$ una riga e una colonna di A siano tutti nulli. Allora il rango di A è uguale ad r.

Vi invito anche a rileggere attentamente la sezione introduttiva 2.3 e le due sezioni sui sottospazi affini di uno spazio vettoriale e loro equazioni (parametriche e cartesiane) [2].

1. Sottospazi affini

Un sottospazio affine L di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme della forma

$$L = \underline{v}_0 + W = \{\underline{v}_0 + \underline{w} \,|\, \underline{w} \in W\}$$

con $\underline{v}_0 \in V$ e W un sottospazio di V. W è detto *sottospazio di giacitura* di L o anche, semplicemente, *sottospazio associato a* L. Si dice anche che L è *parallelo* a W e che L è stato ottenuto traslando tramite $\underline{v}_0$ il sottospazio W. Si pone $\dim L := \dim W$.
Infine, diremo che due sottospazi affini L_1 e L_2 di giacitura W_1 e W_2 rispettivamente sono *paralleli* se $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$. In particolare, se L_1 e L_2 hanno la stessa dimensione allora L_1 e L_2 sono paralleli se $W_1 = W_2$. Se $\dim L_1 < \dim L_2$ allora L_1 e L_2 sono paralleli se $W_1 \subset W_2$.
Due sottospazi affini che non sono paralleli sono *sghembi/incidenti* se hanno intersezione *vuota/non-vuota*.

Abbiamo visto (capitolo 2 del libro di testo) che fissato un punto O nello spazio ordinario $\mathcal{A}^3$ esiste una corrispondenza biunivoca di insiemi:

$$\mathcal{A}^3 \leftrightarrow \mathcal{V}_O$$

che associa al **punto** $P \in \mathcal{A}^3$ il **vettore** $\overrightarrow{OP} \in \mathcal{V}_O$. In particolare il punto O è trasformato nel vettore nullo di $\mathcal{V}_O$.
Come spiegato in dettaglio all'inizio del corso e nella sezione 2.3 del libro di testo, questa corrispondenza biunivoca trasforma i punti di $\mathcal{A}^3$ nei vettori di $\mathcal{V}_O$ (già visto

[1] Utilizzeremo un caso molto semplice del Teorema degli Orlati, deducibile direttamente; tuttavia, è un risultato interessante ed utile ed è per questo motivo che lo enuncio. Dimostrazione nel libro di testo, pag. 178.

[2] Abate-de Fabritiis §6.4 e 6.5 e anche le brevi note da me scritte in un compito per casa

qui sopra), le rette dello spazio $\mathcal{A}^3$ nei sottospazi affini di dimensione 1 di $\mathcal{V}_O$; i piani dello spazio $\mathcal{A}^3$ nei sottospazi affini di dimensione 2 di $\mathcal{V}_O$ [3].

Inoltre trasforma le rette (rispettiv. i piani) passanti per il punto O, nei sottospazi vettoriali di dimensione 1 (rispettiv. 2) di $\mathcal{V}_O$.
Riassumendo: possiamo studiare le proprietà geometriche di punti, rette e piani in $\mathcal{A}^3$ studiando le proprietà geometriche dei sottospazi affini di $\mathcal{V}_O$.
Spesso identificheremo punti, rette e piani di $\mathcal{A}^3$ con i correspondenti sottospazi affini di $\mathcal{V}_O$.

I sottospazi affini di $\mathcal{V}_O$ sono:

- i punti, con giacitura il sottospazio banale $\overrightarrow{0}$,
- le rette, con giacitura le rette vettoriali di $\mathcal{V}_O$,
- i piani, con giacitura i piani vettoriali di $\mathcal{V}_O$,

2. Riferimenti Affini

Fissiamo ora una qualsiasi base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ per lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$. Rimangono allora determinate le coordinate di ogni vettore di $\mathcal{V}_O$ rispetto a questa base. Definiamo le coordinate di un punto P di $\mathcal{A}^3$ come le coordinate di $\overrightarrow{OP}$ in $\mathcal{V}_O$. Per ragioni tipografiche scriveremo le coordinate in riga e non in colonna.
Le coordinate dipendono dalla scelta di O e dalla scelta della base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$. Si dice allora che è stato fissato un **riferimento affine** $RA(O, \underline{i}, \underline{j}\, \underline{k})$ in $\mathcal{A}^3$ con coordinate associate (x, y, z). Se

$$\underline{i} = \overrightarrow{OA_1}\,, \quad \underline{j} = \overrightarrow{OA_2}\,, \quad \underline{k} = \overrightarrow{OA_3}$$

per tre punti A_1, A_2, A_3 tali che O, A_1, A_2, A_3 siano non-complanari, allora si usa anche la notazione $RA(O, A_1, A_2, A_3)$.
Quanto studiato in questo corso permette di scrivere senza particolari difficoltà le formule di cambiamento di coordinate quando si passa da un riferimento affine $RA(O, A_1, A_2, A_3)$ ad un riferimento affine $RA(O', A'_1, A'_2, A'_3)$. Enuncio ed illustro il risultato senza dare dimostrazioni dettagliate (per queste, vi rimando alla sezione 10.7 del libro di testo). Per ragioni tipografiche siano $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ le coordinate associate a $RA(O, A_1, A_2, A_3)$ e siano $\underline{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ le coordinate associate a $RA(O', A'_1, A'_2, A'_3)$. Un problema preliminare che dobbiamo affrontare è che il primo riferimento coinvolge lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ mentre il secondo coinvolge lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_{O'}$; più precisamente il primo riferimento considera la base

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}\} \text{ in } \mathcal{V}_O$$

mentre il secondo considera la base

$$\mathcal{B}'_{O'} = \{\overrightarrow{O'A'_1}, \overrightarrow{O'A'_2}, \overrightarrow{O'A'_3}\} \text{ in } \mathcal{V}_{O'}$$

Vogliamo lavorare in un solo spazio vettoriale e per questa ragione trasliamo i tre vettori di $\mathcal{B}'_{O'}$ per riportarli in $\mathcal{V}_O$. Consideriamo i punti A^*_1, A^*_2, A^*_3 ottenuti traslando A'_1, A'_2, A'_3 tramite il vettore $-\overrightarrow{OO'}$. Vedere la figura 10.17 nel libro di testo. Poniamo quindi

$$\overrightarrow{OA^*_j} := \overrightarrow{OA'_j} - \overrightarrow{OO'}\,.$$

[3]Nella sezione 2.3 non si parla ancora di spazi vettoriali e sottospazi affini, ma con il senno del poi questo è precisamente quello che viene dimostrato. Vedere anche più avanti, (4), per questo punto.

Otteniamo in questo modo una base

$$\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{OA_1^*}, \overrightarrow{OA_2^*}, \overrightarrow{OA_3^*}\} \text{ in } \mathcal{V}_O$$

Sia $B = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id})$ la matrice del cambiamento di base e siano $\underline{c}$ le coordinate di O' nel riferimento $RA(O, A_1, A_2, A_3)$, allora si dimostra che

$$\underline{x} = B\underline{x}' + \underline{c}\,. \tag{1}$$

e quindi

$$\underline{x}' = B^{-1}\underline{x}' - B^{-1}\underline{c}\,. \tag{2}$$

3. Equazione di un piano.

Consideriamo un piano π di $\mathcal{A}^3$ passante per un punto Q e sia π_O il piano per O parallelo a π. Identifichiamo π_O con il corrispondente sottospazio vettoriale W in $\mathcal{V}_O$: $W := \{\overrightarrow{OP}, P \in \pi_O\}$. Per quanto visto in Sezione 2.3 del libro di testo abbiamo che

$$P \in \pi \text{ se e solo se } \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} \in W \tag{3}$$

se e solo se esiste $\underline{w} \in W$ tale che $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \underline{w}$.
Se $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ allora P appartiene a π se e solo se esistono $s, t \in \mathbb{R}$ tali che

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = s\underline{w}_1 + t\underline{w}_2$$

se e solo se esistono $s, t \in \mathbb{R}$ tali che

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + s\underline{w}_1 + t\underline{w}_2 \tag{4}$$

Questo dimostra tra l'altro, come anticipato nella nota a piè di pagina nella pagina precedente, che l'insieme $\{\overrightarrow{OP},\ P \in \pi\}$ è effettivamente un sottospazio affine di $\mathcal{V}_O$ con giacitura W.
Se Q ha coordinate (x_Q, y_Q, z_Q) (il che vuol dire, per definizione, che $\overrightarrow{OQ}$ ha coordinate (x_Q, y_Q, z_Q)) e se le due terne (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) sono le coordinate dei due vettori linearmente indipendenti $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ che generano la giacitura W, allora un punto P di coordinate (x, y, z) appartiene a π se e solo se esistono $s, t \in \mathbb{R}$ tali che

$$(x, y, z) = (x_Q, y_Q, z_Q) + s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2) \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Queste sono le equazioni *parametriche* del piano π. Se sono assegnati tre punti *non allineati* P_0, P_1, P_2 di π, allora possiamo scegliere, ad esempio, $Q = P_0$ e

$$\underline{w}_1 = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}\,, \qquad \underline{w}_2 = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}.$$

Infatti, dalla (3),

$$\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} \in W\,, \quad \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0} \in W\,;$$

inoltre dato che i punti sono non allineati si ha subito che i due vettori

$$\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}$$

sono non-proporzionali e sono quindi una base per W.

Per quel che concerne le equazioni cartesiane di π, sappiamo dalla teoria che π è ottenuto come l'insieme dei punti le cui coordinate costituiscono l'insieme delle soluzioni di *una* equazione lineare

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad \text{con} \quad \mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix} = 1\,.$$

(Basta ragionare sul fatto che le coordinate dei punti di π sono le coordinate dei vettori di $\mathcal{V}_O$ che appartengono al piano affine $\{\overrightarrow{OP},\ P \in \pi\}$ e applicare poi la teoria a questo piano affine.)
Viceversa, dal teorema di struttura, sappiamo che l'insieme S costituito dai punti le cui coordinate soddisfano *una* equazione lineare

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad \text{con} \quad \mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix} = 1$$

è un sottospazio affine di dimensione 3-1=2. Più precisamente, S è il piano affine ottenuto per traslazione tramite una soluzione particolare di $Ax+By+Cz+D=0$ e con giacitura data in coordinate dal sottospazio vettoriale W di equazioni cartesiane

$$Ax + By + Cz = 0$$

(l'equazione omogenea associata).

Sia π un piano in $\mathcal{A}^3$ passante per P_0 e sia $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ la giacitura individuata da π. Per ottenere **esplicitamente** l'equazione cartesiana di π a partire da P_0 e $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ osserviamo nuovamente che si ha:

$$(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)\,.$$

Ciò accade se e solo se la matrice 3×3 con righe uguali a $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) ha rango 2. Ciò è equivalente a richiedere che

$$\text{(5)} \qquad \det\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è l'equazione cartesiana cercata.
Sviluppando secondo la prima riga otteniamo un'equazione del tipo

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

e quindi un'equazione del tipo

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

come deve essere.
I numeri reali A, B, C, che sono a volte chiamati i *parametri di giacitura* di π, sono dati esplicitamente da

$$\text{(6)} \qquad A = \det\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\,, \quad B = -\det\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\,, \quad C = \det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Essendo

$$\mathrm{rg}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$$

vediamo che $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

Conclusione: dati P_0 e $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$, siamo in grado di scrivere l'equazione cartesiana del piano per P_0 e di giacitura W; questa equazione è del tipo $Ax+By+Cz+D=0$ con $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ ed è data esplicitamente da (5).

Analogamente, per quanto già osservato, siamo in grado di scrivere l'equazione del piano per tre punti P_0, P_1, P_2 non allineati: basterà scegliere P_0 come punto e

$$\underline{w}_1 = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}\,, \qquad \underline{w}_2 = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}.$$

come vettori di giacitura; poi applichiamo la usuale procedura ed otteniamo *l'equazione del piano per tre punti non-allineati.* La scriviamo esplicitamente:

$$\det \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante secondo la prima riga otteniamo anche in questo caso un'equazione nella forma

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{con} \quad (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$$

come deve essere.

Notiamo infine che l'equazione di un piano è individuata a meno di un fattore di proporzionalità non-nullo; detto altrimenti, le due equazioni

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad \text{e} \quad \lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + \lambda D = 0, \;\; \lambda \neq 0$$

rappresentano lo stesso piano.

4. Equazione di una retta.

Sia r una retta di $\mathcal{A}^3$ passante per P_0 e sia r_O la retta parallela ad r e passante per O; quest'ultima corrisponde ad un sottospazio vettoriale W di $\mathcal{V}_O$ di dimensione 1. Procedendo come nel caso del piano vediamo che $\{\overrightarrow{OP}, P \in r\}$ è una retta affine, ottenuta traslando tramite $\overrightarrow{OP_0}$ i vettori del sottospazio W. Passiamo in coordinate. Allora $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ed il sottospazio vettoriale W è generato da un vettore non nullo $\underline{w} = (l, m, n) \neq \underline{0}$ detto *vettore direzione.* Il sottospazio vettoriale $W = \mathrm{Span}(\underline{w})$ è anche detto la *direzione* di r. Le coordinate di $\underline{w}$ sono, per definizione, i *parametri direttori* di r. Ovviamente sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.
Utilizzando nuovamente i ragionamenti della sezione 2.3 vediamo che un punto P di coordinate (x, y, z) appartiene a r se e solo se

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} \in W$$

se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t\underline{w}$ se e solo se, in coordinate, esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(l, m, n)$$

se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n)$$

Quindi i punti di r sono descritti in coordinate da

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Queste sono le equazioni *parametriche* di r. Se P_1 è un altro punto della retta, distinto da P_0, allora, in particolare, $\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} \in W$ ed essendo tale vettore non-nullo esso può essere scelto come generatore di W. Ne segue che se la retta è data tramite due suoi punti distinti P_0 e P_1 allora possiamo scrivere le sue equazioni parametriche scegliendo $l = (x_1 - x_0)$, $m = (y_1 - y_0)$, $n = (z_1 - z_0)$ ed ottenedo quindi

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Per ottenere le equazioni cartesiane ragioniamo come nel caso del piano. Una retta di $\mathcal{A}^3$ corrisponde ad un un sottospazio affine di dimensione 1; *a priori*, per la discussione generale fatta sui sottospazi affini, sappiamo che r sarà espressa come insieme delle soluzioni di un sistema di $3-1$ equazioni in 3 incognite di rango $3-1$. Quindi r avrà equazioni cartesiane del tipo:

$$\begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{cases} \qquad \text{con} \quad \text{rg} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

Per ritrovare questo risultato generale nel caso in esame e per trovare *esplicitamente* le equazioni ragioniamo come nel caso del piano:

$$(x, y, z) \in r \Leftrightarrow (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \text{Span}(\underline{w})$$

Le equazioni cartesiane sono quindi date imponendo che sia

$$rg \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1 \; .$$

Supponiamo, ad esempio, $l \neq 0$. Possiamo ora procedere in due modi.

Riduciamo con Gauss

$$\left| \begin{array}{c|c} l & x - x_0 \\ m & y - y_0 \\ n & z - z_0 \end{array} \right.$$

utilizzando l come pivot e imponiamo che i due coefficienti a destra della linea verticale che si trovano in riga 2 e riga 3 siano uguali a zero. Otteniamo due equazioni non omogenee che sono equazioni cartesiane per la retta.

Oppure, e questo è il metodo "classico", utilizziamo il teorema degli orlati: orlando un minore 1×1 non nullo nella seconda riga (certamente esistente dato che $\underline{w} \neq \underline{0}$) sappiamo che la condizione

$$rg \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1$$

è equivalente all'annullarsi dei minori di ordine 2 che *orlano* quel minore 1×1 non nullo. Se ad esempio è $l \neq 0$, come nel nostro caso, otteniamo che

$$rg \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1$$

se e solo se

$$\det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0 \, , \quad \det \begin{vmatrix} x - x_0 & z - z_0 \\ l & n \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

che è del tipo

$$\begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{cases} \qquad \text{con} \quad r \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

come deve essere. Per vedere che $r \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$ osserviamo semplicemente che dal calcolo precedente risulta $(A, B, C) = (m, -l, 0)$ e $(A', B', C') = (n, 0, -l)$ e questi due vettori sono non-proporzionali dato che $l \neq 0$.

Viceversa, sappiamo dalla teoria generale che il sottoinsieme di $\mathcal{V}_O$ costitutito dai vettori le cui coordinate soddisfano un sistema del tipo

$$\begin{cases} AX+BY+CZ+D=0 \\ A'X+B'Y+C'Z+D'=0 \end{cases} \quad \text{con} \quad r\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}=2$$

è un sottospazio affine di dimensione 1 (una retta), e più precisamente la retta passante per una soluzione particolare del sistema dato e con giacitura il sottospazio 1-dimensionale

$$W=\{\underline{w}\equiv(x,y,z) \mid \begin{cases} Ax+By+Cz=0 \\ A'x+B'y+C'z=0 \end{cases}\}.$$

5. Mutua posizione di rette e piani

È possibile studiare la mutua posizione di rette e piani applicando il Teorema di Rouché Capelli. Per i dettagli vi rimando alle note più estese che trovate nella pagina web del corso da me tenuto nell'anno accademico 2020-2021.

6. Geometria euclidea

Abbiamo utilizzato le proprietà dello spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ per studiare rette e piani di $\mathcal{A}^3$. Fino ad ora *non* abbiamo utilizzato il fatto che $\mathcal{V}_O$ è anche uno spazio vettoriale metrico, con prodotto scalare definito positivo

$$<\underline{v},\underline{w}>=\|\underline{v}\|\,||\underline{w}||\cos\widehat{\underline{v}\underline{w}}$$

dove $\| \ \|$ denota la lunghezza del segmento orientato $\underline{v}\in\mathcal{V}_O$.

Vogliamo ora studiare le ulteriori proprietà di $\mathcal{A}^3$ che si deducono dall'utilizzo della struttura di spazio vettoriale metrico di $\mathcal{V}_O$, *in particolare dall'uso delle coordinate associate ad una base ortonormale.* Lo spazio tridimensionale con questa ulteriori proprietà metriche è chiamato lo **spazio euclideo** ed è denotato con il simbolo $\mathcal{E}^3$. Vi invito a rivedere rapidamente quanto abbiamo imparato sugli spazi vettoriali metrici, in particolare le note di geometria euclidea vettoriale in $(\mathcal{V}_O,<\,,\,>)$.

Quando fissiamo un riferimento affine con base

$$\underline{i}=\overrightarrow{OA_1}\,,\quad \underline{j}=\overrightarrow{OA_2}\,,\quad \underline{k}=\overrightarrow{OA_3}$$

ortonormale allora diciamo che abbiamo fissato un riferimento **cartesiano**, e lo denotiamo $RC(O,A_1,A_2,A_3)$. Le coordinate associate sono dette *coordinate cartesiane*. I cambiamenti di coordinate cartesiane si esprimono similmente a quelli affini ma le matrici coinvolte sono ora matrici ortogonali. Più precisamente, se $RC(O,A_1,A_2,A_3)$ e $RC(O',A_1',A_2',A_3')$ sono due riferimenti cartesiani con coordinate $\underline{x}$ e $\underline{x}'$ allora vale la formula (1), e cioè

$$\underline{x}=B\underline{x}'+\underline{c}$$

dove ora $B\in O(3)$ e dove $\underline{c}$ sono sempre le coordinate di O' in $RC(O,A_1,A_2,A_3)$. I cambiamenti di coordinate cartesiani sono ovviamente assai importanti in Fisica perché le leggi fisiche sono molto spesso espresse tramite formule che coinvolgono le coordinate rispetto ad un riferimento ed è fondamentale sapere come cambiano le espressioni analitiche di queste leggi qualora si cambi di riferimento.

Per la distanza fra due punti P e Q di $\mathcal{A}^3$ si ha

$$d(P,Q)=\|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\|\equiv\|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}\|$$

Vi ricordo che abbiamo fissato una base **ortonormale** di $\mathcal{V}_O$, $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$, con coordinate associate (x, y, z); allora sappiamo che il prodotto scalare di $\overrightarrow{OP}$ di coordinate (x, y, z) e $\overrightarrow{OP'}$ di coordinate (x', y', z') è uguale a $xx' + yy' + zz'$. Quindi

$$\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{< \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP} >} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Dato che $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ ha coordinate $(x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P)$ concludiamo che

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

Questa è l'espressione in coordinate della distanza fra due punti.

Consideriamo due rette r e r' con giaciture W_r e $W_{r'}$. Avremo $W_r = \mathbb{R}\underline{r}$ e $W_{r'} = \mathbb{R}\underline{r}'$; vi ricordo che i vettori $\underline{r} = (\ell, m, n)$ e $\underline{r}' = (\ell', m', n')$ sono per definizione i *vettori direttori* delle rette e le loro coordinate sono i *parametri direttori* delle rette. Sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità.
Diremo che le due rette sono ortogonali se $\underline{r} \perp \underline{r}'$ e ciò accade se e solo se $< \underline{r}, \underline{r}' >= 0$ e quindi se e solo se

$$\ell\ell' + mm' + nn' = 0$$

Quindi l'ortogonalità fra due rette viene ricondotta all'ortogonalità delle rispettive giaciture e per questa possiamo utilizzare l'espressione in coordinate del prodotto scalare.

Consideriamo ora un piano π ed una retta r. Abbiamo le due giaciture

$$W_\pi \leq \mathcal{V}_O \quad \text{e} \quad W_r \leq \mathcal{V}_O$$

Diremo che π è ortogonale a r se $W_\pi \perp W_r$ e cioè se $\underline{r}$ è un vettore ortogonale a W_π. Vi ricordo che se π ha equazione $Ax + By + Cz + D = 0$ allora un vettore generatore per la retta vettoriale $(W_\pi)^\perp$ è il vettore $\underline{n}_\pi$ di coordinate (A, B, C). Questo vettore è anche chiamato un *vettore normale* a π. Quindi r è ortogonale a π se un suo vettore direttore, $\underline{r}$, è proporzionale ad un vettore normale $\underline{n}_\pi$ e cioè se $(\ell, m, n) = \alpha(A, B, C)$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se, infine, π e π' sono due piani, allora diremo che π è ortogonale a π' se $\underline{n}_\pi \perp \underline{n}_{\pi'}$ e ciò accade se e solo se $< \underline{n}_\pi, \underline{n}_{\pi'} >= 0$.
Se π ha equazione $Ax+By+Cz+D = 0$ e π' ha equazione $A'x+B'y+C'z+D' = 0$ allora $\pi \perp \pi'$ se e solo se

$$AA' + BB' + CC' = 0$$

Ovviamente possiamo più in generale parlare di **angoli** [4].
Infine: possiamo definire oltre alla distanza fra due punti, la distanza piano-punto, la distanza retta-punto e la distanza retta-retta. Queste distanze sono per definizione uguali a zero se, rispettivamente, il punto appartiene al piano, il punto appartiene alla retta oppure le rette sono incidenti. In caso contrario procediamo come segue.
Ad esempio, la distanza fra un piano π ed un punto P esterno a tale piano è semplicemente la distanza fra P e la sua proiezione ortogonale su π, denotiamola P'. Per definizione P' è l'intersezione di π con la retta per P ortogonale a π.
Analogamente la distanza di una retta r da un punto P esterno ad r è la distanza di P da P', proiezione ortogonale di P su r: P' è l'intersezione di r con il piano per P ortogonale ad r. Queste due distanze sono calcolabili perché si può trovare

[4] Trovate i dettagli nel libro di testo se siete interessati.

esplicitamente P'. Ci sono anche delle formule "pronte all'uso" che trovate nel libro di testo. Ad esempio la distanza fra un punto P_0 di coordinate (x_0, y_0, z_0) ed il piano π di equazione $Ax + By + Cz + D = 0$ è data da

$$\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,.$$

La distanza retta-retta per due rette non-incidenti è un pò più complicata a definirsi e vi rimando nuovamente al libro di testo se siete interessati.