Corso di Laurea in Fisica. Corso di Geometria. a.a. 2020-21
Prof. P. Piazza

Appunti di geometria analitica in dimensione 3.

Vi invito a rivedere i teoremi generali sui sistemi lineari, in particolare:

- il teorema di Rouché-Capelli
- il teorema di struttura per sistemi lineari non-omogenei
- il *Teorema degli orlati* che enunciamo qui di seguito [1]

Teorema degli orlati. Sia $A \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ e sia $A(i_1, i_2, \dots, i_r|j_1, j_2, \dots, j_r)$ la sottomatrice quadrata $r \times r$ costituita dagli elementi di A comuni alle righe A^{i_1}, A^{i_2},..., A^{i_r} e alle colonne A_{j_1}, A_{j_2},..., A_{j_r}.
Supponiamo che il minore

$$\det A(i_1, i_2, \dots, i_r|j_1, j_2, \dots, j_r)$$

sia diverso da zero e che il determinante delle sottomatrici quadrate $(r+1)\times(r+1)$ ottenute aggiungendo a $A(i_1, i_2, \dots, i_r|j_1, j_2, \dots, j_r)$ una riga e una colonna di A siano tutti nulli. Allora il rango di A è uguale ad r.

Vi invito anche a rileggere attentamente la sezione introduttiva 2.3 e le due sezioni sui sottospazi affini di uno spazio vettoriale e loro equazioni (parametriche e cartesiane) [2].

1. Sottospazi affini

Un sottospazio affine L di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme della forma

$$L = \underline{v}_0 + W = \{\underline{v}_0 + \underline{w} \,|\, \underline{w} \in W\}$$

con $\underline{v}_0 \in V$ e W un sottospazio di V. W è detto *sottospazio di giacitura* di L o anche, semplicemente, *sottospazio associato a* L. Si dice anche che L è *parallelo* a W e che L è stato ottenuto traslando tramite $\underline{v}_0$ il sottospazio W. Si pone $\dim L := \dim W$.
Infine, diremo che due sottospazi affini L_1 e L_2 di giacitura W_1 e W_2 rispettivamente sono *paralleli* se $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$. In particolare, se L_1 e L_2 hanno la stessa dimensione allora L_1 e L_2 sono paralleli se $W_1 = W_2$. Se $\dim L_1 < \dim L_2$ allora L_1 e L_2 sono paralleli se $W_1 \subset W_2$.
Due sottospazi affini che non sono paralleli sono *sghembi/incidenti* se hanno intersezione *vuota/non-vuota*.

Abbiamo visto (capitolo 2 del libro di testo) che fissato un punto O nello spazio ordinario $\mathcal{A}^3$ esiste una corrispondenza biunivoca di insiemi:

$$\mathcal{A}^3 \leftrightarrow \mathcal{V}_O$$

che associa al **punto** $P \in \mathcal{A}^3$ il **vettore** $\overrightarrow{OP} \in \mathcal{V}_O$. In particolare il punto O è trasformato nel vettore nullo di $\mathcal{V}_O$.
Come spiegato in dettaglio all'inizio del corso e nella sezione 2.3 del libro di testo, questa corrispondenza biunivoca trasforma i punti di $\mathcal{A}^3$ nei vettori di $\mathcal{V}_O$ (già visto

[1] Utilizzeremo un caso molto semplice del Teorema degli Orlati, deducibile direttamente; tuttavia. è un risultato interessante ed utile ed è per questo motivo che lo enuncio. Dimostrazione nel libro di testo, pag. 178.

[2] Abate-de Fabritiis §6.4 e 6.5

qui sopra), le rette dello spazio $\mathcal{A}^3$ nei sottospazi affini di dimensione 1 di $\mathcal{V}_O$; i piani dello spazio $\mathcal{A}^3$ nei sottospazi affini di dimensione 2 di $\mathcal{V}_O$ [3].

Inoltre trasforma le rette (rispettiv. i piani) passanti per il punto O, nei sottospazi vettoriali di dimensione 1 (rispettiv. 2) di $\mathcal{V}_O$.

Riassumendo: possiamo studiare le proprietà geometriche di punti, rette e piani in $\mathcal{A}^3$ studiando le proprietà geometriche dei sottospazi affini di $\mathcal{V}_O$.
Spesso identificheremo punti, rette e piani di $\mathcal{A}^3$ con i correspondenti sottospazi affini di $\mathcal{V}_O$.

I sottospazi affini di $\mathcal{V}_O$ sono:

- i punti, con giacitura il sottospazio banale $\overrightarrow{0}$,
- le rette, con giacitura le rette vettoriali di $\mathcal{V}_O$,
- i piani, con giacitura i piani vettoriali di $\mathcal{V}_O$,

Fissiamo ora una qualsiasi base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ per lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$. Rimangono allora determinate le coordinate di ogni vettore di $\mathcal{V}_O$ rispetto a questa base. Definiamo le coordinate di un punto P di $\mathcal{A}^3$ come le coordinate di $\overrightarrow{OP}$ in $\mathcal{V}_O$. Le coordinate dipendono dalla scelta di O e dalla scelta della base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$. Si dice allora che è stato fissato un riferimento affine $RA(O, \underline{i}, \underline{j}\, \underline{k})$ in $\mathcal{A}^3$ con coordinate (x, y, z). Si usa anche la notazione $RA(O, x, y, z)$.

2. Equazione di un piano.

Consideriamo un piano π di $\mathcal{A}^3$ passante per un punto Q e sia π_O il piano per O parallelo a π. Identifichiamo π_O con il corrispondente sottospazio vettoriale W in $\mathcal{V}_O$: $W := \{\overrightarrow{OP}, P \in \pi_O\}$. Per quanto visto in Sezione 2.3 del libro di testo abbiamo che

$$P \in \pi \text{ se e solo se } \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} \in W \tag{1}$$

se e solo se esiste $\underline{w} \in W$ tale che $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \underline{w}$.
Se $W = \text{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ allora P appartiene a π se e solo se esistono $s, t \in \mathbb{R}$ tali che

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = s\underline{w}_1 + t\underline{w}_2$$

se e solo se esistono $s, t \in \mathbb{R}$ tali che

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + s\underline{w}_1 + t\underline{w}_2$$

Questo dimostra tra l'altro che l'insieme $\{\overrightarrow{OP},\, P \in \pi\}$ è effettivamente un sottospazio affine di $\mathcal{V}_O$ con giacitura W.
Se Q ha coordinate (x_Q, y_Q, z_Q) (il che vuol dire, per definizione, che $\overrightarrow{OQ}$ ha coordinate (x_Q, y_Q, z_Q)) e se le due terne (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) sono le coordinate dei due vettori linearmente indipendenti $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ che generano la giacitura W, allora un punto P di coordinate (x, y, z) appartiene a π se e solo se esistono $s, t \in \mathbb{R}$ tali che

$$(x, y, z) = (x_Q, y_Q, z_Q) + s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2) \quad s, t \in \mathbb{K}\,.$$

[3] Nella sezione 2.3 non si parla ancora di spazi vettoriali e sottospazi affini, ma con il senno del poi questo è precisamente quello che viene dimostrato. Vedere anche più avanti per questo punto.

Queste sono le equazioni *parametriche* del piano π. Se sono assegnati tre punti *non allineati* P_0, P_1, P_2 di π, allora possiamo scegliere, ad esempio, $Q = P_0$ e

$$\underline{w}_1 = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}\,, \qquad \underline{w}_2 = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}.$$

Infatti, dalla (1),

$$\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} \in W\,, \quad \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0} \in W\,;$$

inoltre dato che i punti sono non allineati si ha subito che i due vettori

$$\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}$$

sono non-proporzionali e sono quindi una base per W.

Per quel che concerne le equazioni cartesiane di π, sappiamo dalla teoria che π è ottenuto come l'insieme dei punti le cui coordinate costituiscono l'insieme delle soluzioni di *una* equazione lineare

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad \text{con} \quad \mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix} = 1\,.$$

(Basta ragionare sul fatto che le coordinate dei punti di π sono le coordinate dei vettori di $\mathcal{V}_O$ che appartengono al piano affine $\{\overrightarrow{OP},\, P \in \pi\}$ e applicare poi la teoria a questo piano affine.)
Viceversa, dal teorema di struttura, sappiamo che l'insieme S costituito dai punti le cui coordinate soddisfano *una* equazione lineare

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad \text{con} \quad \mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix} = 1$$

è un sottospazio affine di dimensione 3-1=2. Più precisamente, S è il piano affine ottenuto per traslazione tramite una soluzione particolare di $Ax+By+Cz+D = 0$ e con giacitura data in coordinate dal sottospazio vettoriale W di equazioni cartesiane

$$Ax + By + Cz = 0$$

(l'equazione omogenea associata).

Sia π un piano in $\mathcal{A}^3$ passante per P_0 e sia $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ la giacitura individuata da π. Per ottenere **esplicitamente** l'equazione cartesiana di π a partire da P_0 e $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ osserviamo nuovamente che si ha:

$$(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)\,.$$

Ciò accade se e solo se la matrice 3×3 con righe uguali a $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) ha rango 2. Ciò è equivalente a richiedere che

$$(2) \qquad \det\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è l'equazione cartesiana cercata.
Sviluppando secondo la prima riga otteniamo un'equazione del tipo

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

e quindi un'equazione del tipo

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

I numeri reali A, B, C, che sono a volte chiamati i *parametri di giacitura* di π, sono dati esplicitamente da

$$(3) \qquad A = \det \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad B = -\det \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad C = \det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Essendo

$$\operatorname{rg} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$$

vediamo che $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

Conclusione: dati P_0 e $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$, siamo in grado di scrivere l'equazione cartesiana del piano per P_0 e di giacitura W; questa equazione è del tipo $Ax+By+Cz+D=0$ con $(A,B,C) \neq (0,0,0)$ ed è data esplicitamente da (2).

Analogamente, per quanto già osservato, siamo in grado di scrivere l'equazione del piano per tre punti P_0, P_1, P_2 non allineati: basterà scegliere P_0 come punto e

$$\underline{w}_1 = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}\,, \qquad \underline{w}_2 = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0}.$$

come vettori di giacitura; poi applichiamo la usuale procedura ed otteniamo *l'equazione del piano per tre punti non-allineati.* La scriviamo esplicitamente, a costo di apparire pedanti:

$$\det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante secondo la prima riga otteniamo un'equazione nella forma

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{con} \quad (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$$

come deve essere.

Notiamo infine che l'equazione di un piano è individuata a meno di un fattore di proporzionalità non-nullo; detto altrimenti, le due equazioni

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad \text{e} \quad \lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + \lambda D = 0, \ \ \lambda \neq 0$$

rappresentano lo stesso piano.

3. Equazione di una retta.

Sia r una retta di $\mathcal{A}^3$ passante per P_0 e sia r_O la retta parallela ad r e passante per O; quest'ultima corrisponde ad un sottospazio vettoriale W di $\mathcal{V}_O$ di dimensione 1. Procedendo come nel caso del piano vediamo che $\{\overrightarrow{OP}, P \in r\}$ è una retta affine, ottenuta traslando tramite $\overrightarrow{OP_0}$ i vettori del sottospazio W. Passiamo in coordinate. Allora $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ed il sottospazio vettoriale W è generato da un vettore non nullo $\underline{w} = (l, m, n) \neq \underline{0}$ detto *vettore direzione.* Il sottospazio vettoriale $W = \mathrm{Span}(\underline{w})$ è anche detto la *direzione* di r. Le coordinate di $\underline{w}$ sono, per definizione, i *parametri direttori* di r. Ovviamente sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Utilizzando nuovamente i ragionamenti della sezione 2.3 vediamo che un punto P di coordinate (x, y, z) appartiene a r se e solo se

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} \in W$$

se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t\underline{w}$ se e solo se, in coordinate, esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(l, m, n)$$

se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n)$$

Quindi i punti di r sono descritti in coordinate da

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Queste sono le equazioni *parametriche* di r. Se P_1 è un altro punto della retta, distinto da P_0, allora, in particolare, $\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} \in W$ ed essendo tale vettore non-nullo esso può essere scelto come generatore di W. Ne segue che potremo anche scrivere le equazioni della retta scegliendo $l = (x_1 - x_0)$, $m = (y_1 - y_0)$, $n = (z_1 - z_0)$.

Per ottenere le equazioni cartesiane ragioniamo come nel caso del piano. Una retta di $\mathcal{A}^3$ corrisponde ad un un sottospazio affine di dimensione 1; *a priori*, per la discussione generale fatta sui sottospazi affini, sappiamo che r sarà espressa come insieme delle soluzioni di un sistema di $3-1$ equazioni in 3 incognite di rango $3-1$. Quindi r avrà equazioni cartesiane del tipo:

$$\begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \text{rg} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

Per ritrovare questo risultato generale nel caso in esame e per trovare *esplicitamente* le equazioni ragioniamo come nel caso del piano:

$$(x, y, z) \in r \Leftrightarrow (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \text{Span}(\underline{w})$$

Le equazioni cartesiane sono quindi date imponendo che sia

$$rg \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1\ .$$

Supponiamo, ad esempio, $l \neq 0$. Possiamo ora procedere in due modi.

Riduciamo con Gauss

$$\left|\begin{array}{c|c} l & x - x_0 \\ m & y - y_0 \\ n & z - z_0 \end{array}\right|$$

utilizzando l come pivot e imponiamo che i due coefficienti a destra della linea verticale che si trovano in riga 2 e riga 3 siano uguali a zero. Otteniamo due equazioni non omogenee che sono equazioni cartesiane per la retta.

Oppure, e questo è il metodo "classico", utilizziamo il teorema degli orlati: orlando un minore 1×1 non nullo nella seconda riga (certamente esistente dato che $\underline{w} \neq \underline{0}$) sappiamo che la condizione

$$rg \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1$$

è equivalente all'annullarsi dei minori di ordine 2 che *orlano* quel minore 1×1 non nullo. Se ad esempio è $l \neq 0$, come nel nostro caso, otteniamo che

$$rg \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1$$

se e solo se

$$\det\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0\,, \quad \det\begin{vmatrix} x-x_0 & z-z_0 \\ l & n \end{vmatrix} = 0\,,$$

che è del tipo

$$\begin{cases} AX+BY+CZ+D=0 \\ A'X+B'Y+C'Z+D'=0 \end{cases} \quad \text{con} \quad r\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

come deve essere. Per vedere che $r\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$ osserviamo semplicemente che dal calcolo precedente risulta $(A,B,C)=(m,-l,0)$ e $(A',B',C')=(n,0,-l)$ e questi due vettori sono non-proporzionali dato che $l \neq 0$.

Viceversa, sappiamo dalla teoria generale che il sottoinsieme di $\mathcal{V}_O$ costitutito dai vettori le cui coordinate soddisfano un sistema del tipo

$$\begin{cases} AX+BY+CZ+D=0 \\ A'X+B'Y+C'Z+D'=0 \end{cases} \quad \text{con} \quad r\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

è un sottospazio affine di dimensione 1 (una retta), e più precisamente la retta passante per una soluzione particolare del sistema dato e con giacitura il sottospazio 1-dimensionale

$$W = \{\underline{w} \mid \begin{cases} Ax+By+Cwz=0 \\ A'x+B'y+C'z=0 \end{cases} \}.$$

Questa è anche la descrizione delle coordinate dei punti di una retta r di $\mathcal{A}^3$.

Fascio di piani per una retta. Sia r la retta di equazioni cartesiane:

$$(4) \qquad \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+By'+C'z+D'=0 \end{cases}, \quad \text{con} \quad \mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2\,.$$

r è quindi espressa come intersezione di due piani π e π'.
È ovvio che i punti della retta r soddisfano l'equazione

$$(5) \qquad \lambda(Ax+By+Cz+D)+\mu(A'x+By'+C'z+D')=0\,, \quad (\lambda,\mu)\neq(0,0)$$

perché $\lambda 0 + \mu 0 = 0$. Quest'equazione rappresenta quindi un piano contenente r. Viceversa, sia σ un piano contenente r e di equazione $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$. Allora tutti i punti di r soddisfano il sistema

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+By'+C'z+D'=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \end{cases}$$

Ma allora, necessariamente,

$$\mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 2$$

(il rango non può essere 1 per la (4) e non può essere 3 perché altrimenti esisterebbe un'unica soluzione) e ne segue che esistono $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ tali che

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\lambda(A,B,C,D)+\mu(A',B',C',D')\,.$$

La conclusione di questo ragionamento è che *la totalità dei piani per r è data da (5) al variare di $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$*. La totalità dei piani per r costituisce il *fascio di piani per r*.

4. Mutua posizione di rette e piani (facoltativo)

.

Studieremo ora la mutua posizione di rette e piani applicando noti teoremi sui sistemi lineari.

Proposizione 1. *Due piani π, π' di equazione cartesiana*

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \qquad A'x + By' + C'z + D' = 0$$

sono paralleli se e soltanto se i coefficienti di giacitura sono proporzionali e cioè se e solo se

$$rg\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 1.$$

Il rango è invece uguale a due se e solo se $\pi \cap \pi' = r$, con r una retta. Se π e π' sono paralleli allora $\pi = \pi'$ oppure $\pi \cap \pi' = \emptyset$ a seconda che sia rispettivamente

$$rg\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 1\,, \qquad rg\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 2\,.$$

Dimostrazione. I due piani sono paralleli se sono associati allo stesso sottospazio 2-dimensionale W. Quindi W deve avere equazione $Ax + Bx + Cx = 0$, perché associato a π, e deve avere equazione $A'x + By' + C'z = 0$, perché associato a π' [4]. Ma l'equazione di W, sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$, è individuata a meno di un fattore di proporzionalità non-nullo; quindi $(A, B, C) = \lambda(A', B', C')$, $\lambda \neq 0$ che si riscrive anche come

$$\mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 1.$$

Viceversa, se questa condizione è soddisfatta allora π ha equazione $A'x + By' + C'z + D/\lambda = 0$; è allora chiaro che π e π' hanno la stessa giacitura e sono quindi paralleli.

Riassumendo: abbiamo dimostrato che $\mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 1$ se e solo se π e π' sono paralleli.

Dal teorema di Rouché-Capelli otteniamo subito che i due piani non hanno punti a comune se e solo se, in aggiunta, $rg\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 2$ mentre è ovvio che essi sono lo stesso piano se e solo se $rg\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 1\,.$

Infine, abbiamo già osservato che la teoria dei sistemi lineari ci dice che il sistema

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + By' + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

ammette come insieme delle soluzioni un sottospazio affine di dimensione 1, cioè una retta, se e solo se $\mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$. La Proposizione è dimostrata.

Fascio improprio di piani. Sia π un piano affine di equazione cartesiana

$$Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

[4] vi ricordo ancora una volta che la giacitura W di un sottospazio affine S dato tramite equazioni cartesiane $A\underline{x} = \underline{b}$ si ottiene considerando il sistema omogeneo associato $A\underline{x} = \overrightarrow{0}$

Dalla discussione fatta nella Proposizione 1 è chiaro che la famiglia di piani π_t di equazione cartesiana

$$Ax + By + Cz + t = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

costituisce la totalità dei piani paralleli a π. La famiglia $\{\pi_t, t \in \mathbb{R}\}$ costituisce il fascio improprio dei piani di giacitura $Ax + By + Cz = 0$ e cioè dei piani paralleli al piano π.

Proposizione 2.
2.1 *Sia $r = \pi \cap \pi'$ una retta di equazione (4) e sia σ il piano di equazione cartesiana*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

Sia $W_r = \mathbb{R}(l, m, n)$ la direzione di r. Allora r è parallela a σ se e soltanto se

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0\ .$$

Equivalentemente, se e solo se

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2$$

e cioè se e soltanto se il determinante di questa matrice 3×3 è $= 0$.
2.2 *Se r e σ sono paralleli allora $r \subset \sigma$ o $r \cap \sigma = \emptyset$ a seconda che sia rispettivamente*

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 2 \qquad rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 3.$$

2.3 *Si ha invece che $r \cap \sigma = P$ se e soltanto se*

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$$

(e cioè il determinante è diverso da zero).

Dimostrazione.
2.1 Sia W_σ la giacitura di σ. Dire che r è parallela a σ è equivalente a dire che il sottospazio W_r è contenuto in W_σ; questo vuol dire che il vettore generatore di W_r, (l, m, n), soddisfa l'equazione cartesiana di W_σ, che è $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$; quindi r è parallela a σ se e solo se $\alpha l + \beta m + \gamma n = 0$, che è quello che si doveva dimostrare.

Se r è data tramite equazioni cartesiane, $r = \pi \cap \pi'$, allora è ovvio che $W_r = W_\pi \cap W_{\pi'}$ e quindi $W_r \subset W_\sigma$ se e solo se $W_\sigma, W_\pi, W_{\pi'}$ appartangono ad uno stesso fascio di piani vettoriali [5], il che accade (già visto) se e solo se $rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2$. La dimostrazione di **2.1** è completa.

La dimostrazione di **2.2** segue subito dal ragionamento fatto nella discussione sul fascio di piani per una retta (per la condizione $r \subset \sigma$) e dal teorema di Rouché-Capelli (per la condizione $r \cap \sigma = \emptyset$).

La dimostrazione di **2.3** è chiara dalla teoria dei sistemi lineari.

[5] il fascio di piani vettoriali per W_r

Proposizione 3. *Sono date due rette r e ρ di equazione rispettivamente*

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta'=0 \end{cases} .$$

r e ρ sono complanari se e soltanto se la matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero. Se r e ρ sono complanari allora

$$r=\rho, \qquad r\cap\rho=P, \qquad r//\rho$$

a seconda che si abbia rispettivamente

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2\,, \tag{6}$$

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 3\,, \tag{7}$$

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 3 \quad rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2 \tag{8}$$

Dimostrazione.
Siano r e ρ come nell'enunciato; le due rette sono complanari se e solo esiste un piano che le contiene. Abbiamo visto che la totalità dei piani per r è il fascio di piani

$$\ell(ax+by+cz+d)+\ell'(a'x+b'y+c'z+d')=0 \ \ ,(\ell,\ell')\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

Denotiamo con $\pi_{(\ell,\ell')}$ il piano del fascio corrispondente alla scelta (ℓ,ℓ'). Analogamente, la totalità dei piani per r' è data da

$$\lambda(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)+\lambda'(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta')=0 \ \ ,(\lambda,\lambda')\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

Denotiamo con $\pi_{(\lambda,\lambda')}$ il piano del fascio corrispondente alla scelta (λ,λ').
Quindi r ed r' sono complanari se e solo se $\exists\,\ell,\ell',\lambda,\lambda'$ tali che

$$\pi_{(\ell,\ell')}=\pi_{(\lambda,\lambda')}\,.$$

Ma $\pi_{(\ell,\ell')}$ ha equazione

$$(\ell a+\ell' a')x+(\ell b+\ell' b')y+(\ell c+\ell' c')z+(\ell d+\ell' d')=0\,;$$

analogamente $\pi_{(\lambda,\lambda')}$ ha equazione

$$(\lambda\alpha+\lambda'\alpha')x+(\lambda\beta+\lambda'\beta')y+(\lambda\gamma+\lambda'\gamma')z+(\lambda\delta+\lambda'\delta')=0\,.$$

Questi due piani coincidono se e solo se esiste $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$\begin{cases} (\ell a + \ell' a') = t(\lambda\alpha + \lambda'\alpha') \\ (\ell b + \ell' b') = t(\lambda\beta + \lambda'\beta') \\ (\ell c + \ell' c') = t(\lambda\gamma + \lambda'\gamma') \\ (\ell d + \ell' d') = t(\lambda\delta + \lambda'\delta') \end{cases}$$

Ma allora le due rette sono complanari se e solo se i quattro vettori

$$(a, b, c, d)\,,\ (a', b', c', d')\,,\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta)\,,\ (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$$

sono linearmente dipendenti. La prima parte della Proposizione è allora dimostrata. La varie eventualità che si presentano per due rette complanari (parallele, coincidenti o incidenti) sono ora facile conseguenza del teorema di Rouché-Capelli. Vi invito a vederlo autonomamente.
Ecco comunque i dettagli.
Abbiamo visto che due rette r e ρ di equazione rispettivamente

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \end{cases} \quad .$$

sono *complanari* se e soltanto se la matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero. Il rango di questa matrice è quindi uguale a 2 oppure uguale a 3 (non può essere certo uguale 1 perché siamo partiti da due rette ben definite). Le due rette coincidono se e solo se il sistema dato dalle 4 equazioni in **3** incognite ha uno spazio di soluzioni (che se non vuoto sappiamo essere uno spazio affine) di dimensione 1. Ma 1=**3**-2. Applicando anche il teorema di Rouché-Capelli vediamo quindi che le due rette sono coincidenti se e solo se

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2\,, \tag{9}$$

Le due rette si incontrano in un punto, cioè in un sottospazio affine di dimensione 0 (e vi faccio notare che 0=**3**-3) se e solo se

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 3\,, \tag{10}$$

Infine, le due rette sono parallele non-coincidenti se e solo se il sistema non ha soluzione e ciò accade, sempre per Rouché-Capelli, se e solo se

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 3 \quad rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2 \tag{11}$$

5. Geometria euclidea

Abbiamo utilizzato le proprietà dello spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ per studiare rette e piani di $\mathcal{A}^3$. Fino ad ora *non* abbiamo utilizzato il fatto che $\mathcal{V}_O$ è anche uno spazio vettoriale metrico, con prodotto scalare definito positivo

$$< \underline{v}, \underline{w} >= \|\underline{v}\| \, ||\underline{w}|| \cos \widehat{\underline{v}\underline{w}}$$

dove $\| \ \|$ denota la lunghezza del segmento orientato $\underline{v} \in \mathcal{V}_O$.

Vogliamo ora studiare le ulteriori proprietà di $\mathcal{A}^3$ che si deducono dall'utilizzo della struttura di spazio vettoriale metrico di $\mathcal{V}_O$, *in particolare dall'uso delle coordinate.* Vi invito a rivedere rapidamente le note di geometria euclidea vettoriale in $(\mathcal{V}_O, < , >)$.

Innanzitutto, per la distanza fra due punti P e Q di $\mathcal{A}^3$ si ha

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\| \equiv \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\|$$

Se fissiamo una base **ortonormale** di $\mathcal{V}_O$, $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$, con coordinate associate (x, y, z) allora sappiamo che il prodotto scalare di $\overrightarrow{OP}$ di coordinate (x, y, z) e $\overrightarrow{OP}'$ di coordinate (x', y', z') è uguale a $xx' + yy' + zz'$. Quindi

$$\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{< \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP} >} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Dato che $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ ha coordinate $(x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P)$ concludiamo che

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

Questa è l'espressione in coordinate della distanza fra due punti.

Consideriamo due rette r e r' con giaciture W_r e $W_{r'}$. Avremo $W_r = \mathbb{R}\underline{r}$ e $W_{r'} = \mathbb{R}\underline{r}'$; vi ricordo che i vettori $\underline{r} = (\ell, m, n)$ e $\underline{r}' = (\ell', m', n')$ sono per definizione i *vettori direttori* delle rette e le loro coordinate sono i *parametri direttori* delle rette. Sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità.
Diremo che le due rette sono ortogonali se $\underline{r} \perp \underline{r}'$ e ciò accade se e solo se $< \underline{r}, \underline{r}' >= 0$ e quindi se e solo se

$$\ell\ell' + mm' + nn' = 0$$

Quindi l'ortogonalità fra due rette viene ricondotta all'ortogonalità delle rispettive giaciture e per questa possiamo utilizzare l'espressione in coordinate del prodotto scalare.

Consideriamo ora un piano π ed una retta r. Abbiamo le due giaciture

$$W_\pi \leq \mathcal{V}_O \quad \text{e} \quad W_r \leq \mathcal{V}_O$$

Diremo che π è ortogonale a r se $W_\pi \perp W_r$ e cioè se $\underline{r}$ è un vettore ortogonale a W_π. Vi ricordo che se π ha equazione $Ax + By + Cz + D = 0$ allora un vettore generatore per la retta vettoriale $(W_\pi)^\perp$ è il vettore $\underline{n}_\pi$ di coordinate (A, B, C). Questo vettore è anche chiamato un *vettore normale* a π. Quindi r è ortogonale a π se $\underline{r}$ è proporzionale ad un vettore normale $\underline{n}_\pi$ e cioè se $(\ell, m, n) = \alpha(A, B, C)$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se, infine, π e π' sono due piani, allora diremo che π è ortogonale a π' se $\underline{n}_\pi \perp \underline{n}_{\pi'}$ e ciò accade se e solo se $< \underline{n}_\pi, \underline{n}_{\pi'} >= 0$.
Se π ha equazione $Ax+By+Cz+D = 0$ e π' ha equazione $A'x+B'y+C'z+D' = 0$ allora $\pi \perp \pi'$ se e solo se

$$AA' + BB' + CC' = 0$$

Ovviamente possiamo più in generale parlare di **angoli**. In questo contesto è più pratico utilizzare **versori**. Fissiamo inoltre un'orientazione di $\mathcal{V}_O$ scegliendo come orientazione quella determinata dalla base ortonormale fissata $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$.
Ad esempio, possiamo definire l'angolo fra due rette *orientate* (dobbiamo orientare le rette per definire univocamente l'angolo; fate una figura nel piano per capire che altrimenti esistono due angoli convessi). Una retta orientata è una retta insieme alla scelta di un **versore** per la sua giacitura e cioè di un vettore di lunghezza unitaria generatore della giacitura. Una retta ha due orientazioni. Se r è orientata da un versore $\underline{r}$ e r' è orientata da un versore $\underline{r}'$ allora poniamo $\widehat{rr'} := \widehat{\underline{r}\,\underline{r}'}$; il coseno di questo angolo è $< \underline{r}, \underline{r}' >$ (ricordate che qui abbiamo vettori di lunghezza unitaria) che ovviamente ha un'espressione in coordinate.
Analogamente si può definire l'angolo fra due piani scegliendo per ognuno di essi un **versore normale.** [6]. Vi rimando al libro di testo per i dettagli; vi rimando al libro anche per l'angolo fra retta e piano.

Infine: possiamo definire oltre alla distanza fra due punti, la distanza piano-punto, la distanza retta-punto e la distanza retta-retta. Queste distanze sono per definizione uguali a zero se, rispettivamente, il punto appartiene al piano, il prunto appartiene alla retta oppure le rette sono incidenti.
Ad esempio, la distanza fra un piano π ed un punto P esterno a tale piano è semplicemente la distanza fra P e la sua proiezione ortogonale su π, denotiamola P'. Per definizione P' è l'intersezione di π con la retta per P ortogonale a π.
Analogamente la distanza di una retta r da un punto P esterno ad r è la distanza di P da P', proiezione ortogonale di P su r: P' è l'intersezione di r con il piano per P ortogonale ad r. Queste due distanze sono calcolabili perché si può trovare esplicitamente P'. Ci sono anche delle formule "pronte all'uso" che trovate nel libro di testo. Ad esempio la distanza fra un punto P_0 di coordinate (x_0, y_0, z_0) ed il piano π di equazione $Ax + By + Cz + D = 0$ è data da

$$\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

La distanza retta-retta per due rette non-incidenti è un pò più complicata a definirsi e vi rimando nuovamente al libro di testo.

[6] Questa scelta equivale ad una scelta di orientazione nel piano