Corso di Laurea in Matematica. Corso di Geometria 1. a.a. 2019-20
Prof. P. Piazza

Appunti di Geometria Affine in dimensione 3.

Vi invito a rivedere i teoremi generali sui sistemi lineari, in particolare:

- il teorema di Rouché-Capelli
- la caratterizzazione del rango in termini dei determinanti delle sottomatrici quadrate (detti *minori*) che riassumiano nell'enunciato seguente:
  Teorema. *Il rango di A è uguale al massimo ordine dei minori non nulli di A.*
- il *Teorema degli orlati* che enunciamo qui di seguito per comodità [1]

Teorema degli orlati. Sia $A \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ e sia $A(i_1, i_2, \dots, i_r | j_1, j_2, \dots, j_r)$ la sottomatrice quadrata $r \times r$ costituita dagli elementi di A comuni alle righe A^{i_1}, A^{i_2},..., A^{i_r} e alle colonne A_{j_1}, A_{j_2},..., A_{j_r}.
Supponiamo che il minore

$$\det A(i_1, i_2, \dots, i_r | j_1, j_2, \dots, j_r)$$

sia diverso da zero e che il determinante delle sottomatrici quadrate $(r+1)\times(r+1)$ ottenute aggiungendo a $A(i_1, i_2, \dots, i_r | j_1, j_2, \dots, j_r)$ una riga e una colonna di A siano tutti nulli. Allora il rango di A è uguale ad r.

Il contenuto del Teorema degli orlati è il seguente: per dimostrare che rango di A è uguale ad r non dobbiamo controllare che esista un minore di ordine r non nullo e che *tutti* i minori di ordine $r+1$ siano nulli; basta controllare che siano nulli i minori di ordine $r+1$ che si ottengono *orlando* la sottomatrice $r \times r$ che dà il minore di ordine r non nullo.

Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine su V con V uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo $\mathbb{K}$.

Esempio 1. Lo spazio affine $\mathbf{A}$ dato dallo *spazio ordinario*: $\mathbf{A}$ è uno spazio affine sullo spazio vettoriale *reale* $\mathcal{V}$ di dimensione 3 costituito dai vettori geometrici dello spazio.

Esempio 2. Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ allora abbiamo lo spazio affine V_a che ha come insieme V stesso e come struttura affine

$$V_a \times V_a \to V\,; (\underline{v}, \underline{w}) \to \underline{w} - \underline{v}\,.$$

Fissiamo un punto $O \in A$ ed una base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ per la spazio vettoriale V. Rimangono determinate le coordinate di ogni vettore di V rispetto alla base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$. Otteniamo in questo modo il riferimento affine $O\,\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k}$, con coordinate associate (x, y, z); le coordinate del punto P sono, per definizione, le coordinate del vettore $\overrightarrow{OP} \in V$.

Le coordinate dipendono ovviamente dalla scelta di O e dalla scelta della base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$. Il riferimento affine è denotato in altri libri con $RA(O, \underline{i}, \underline{j}\,\underline{k})$.

[1] Utilizzeremo un caso molto semplice del Teorema degli Orlati, deducibile direttamente; tuttavia. è un risultato interessante ed utile ed è per questo motivo che lo enuncio. Per la dimostrazione: Sernesi p. 87.

Siamo interessati, in generale, ai sottospazi affini di uno spazio affine $\mathbf{A}$ di dimensione 3. Un sottospazio affine S di $\mathbf{A}$ è determinato da un punto e da un sottospazio vettoriale W di V detto *giacitura* di S. È definito come

$$S := \{P \in \mathbf{A} \,|\, \overrightarrow{QP} \in W\} \tag{1}$$

Denotiamo la giacitura di S con W_S se può far comodo.
I sottospazi affini di $\mathbf{A}$ sono:

- i punti, con giacitura il sottospazio banale $\underline{0}$,
- le rette affini, con giacitura le rette vettoriali di V,
- i piani affini, con giacitura i piani vettoriali di V,
- $\mathbf{A}$ stesso, con giacitura V.

Diremo che due sottospazi affini S_1 e S_2 di giacitura W_1 e W_2 rispettivamente sono *paralleli* se $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$. In particolare, se W_1 e W_2 hanno la stessa dimensione allora S_1 e S_2 sono paralleli se $W_1 = W_2$. Se $\dim S_1 < \dim S_2$ allora S_1 e S_2 sono paralleli se $W_1 \subset W_2$.
Due sottospazi che non sono paralleli sono *sghembi/incidenti* se hanno intersezione *vuota/non-vuota.*

Piani affini. Per definizione un piano affine π dello spazio affine $\mathbf{A}$ è individuato da un punto Q e da un sottospazio vettoriale W di dimensione 2 in V. Un punto P appartiene a π se e solo se $\overrightarrow{QP} \in W$ se e solo se esiste $\underline{w} \in W$ tale che $\overrightarrow{QP} = \underline{w}$. Se $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ allora P appartiene a π se e solo se esistono $s, t \in \mathbb{K}$ tali che

$$\overrightarrow{QP} = s\underline{w}_1 + t\underline{w}_2$$

Se Q ha coordinate $(x_Q, y_Q, z_Q) \in \mathbb{K}^3$ e se le due terne (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) sono le coordinate dei due vettori linearmente indipendenti $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ che generano la giacitura W, allora un punto P di coordinate (x, y, z) appartiene a π se e solo se esistono $s, t \in \mathbb{K}$ tali che

$$(x, y, z) - (x_Q, y_Q, z_Q) = s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)\,.$$

Riassumendo, i punti di π sono descritti da

$$(x, y, z) = (x_Q, y_Q, z_Q) + s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2) \quad s, t \in \mathbb{K}\,.$$

Queste sono le equazioni *parametriche* del piano π. Se sono assegnati tre punti *non allineati* P_0, P_1, P_2 di π, allora possiamo scegliere, ad esempio, $Q = P_0$ e

$$\underline{w}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}\,, \qquad \underline{w}_2 = \overrightarrow{P_0P_2}.$$

Infatti, dalla (1),

$$\overrightarrow{P_0P_1} \in W\,, \quad \overrightarrow{P_0P_2} \in W\,;$$

inoltre dato che i punti sono non allineati si ha subito che i due vettori $\overrightarrow{P_0P_1}$ e $\overrightarrow{P_0P_2}$ sono non-proporzionali e sono quindi una base per W.

Per quel che concerne le equazioni cartesiane, sappiamo dalla teoria che π è ottenuto come l'insieme dei punti le cui coordinate costituiscono l'insieme delle soluzioni di *una* equazione lineare

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad \text{con} \quad \mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix} = 1\,.$$

[2] Viceversa, sappiamo che l'insieme S costituito dai punti le cui coordinate soddisfano *una* equazione lineare

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad \text{con} \quad \mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix} = 1$$

è un sottospazio affine di dimensione 3-1=2. Più precisamente, S è il piano passante per una soluzione particolare di $Ax + By + Cz + D = 0$ e con giacitura data in coordinate dal sottospazio vettoriale W di equazioni cartesiane

$$Aw^1 + Bw^2 + Cw^3 = 0.$$

Sia π un piano affine per P_0 e di giacitura $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$. Per ottenere *esplicitamente* l'equazione cartesiana di π a partire da P_0 e $\underline{w}_1, \underline{w}_2$, e dimostrare contemporaneamente il caso particolare del teorema generale, osserviamo nuovamente che si ha:

$$(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)\,.$$

Ciò accade se e solo se la matrice 3×3 con righe uguali a $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) ha rango 2. Ciò è equivalente a richiedere che

$$\det\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando secondo la prima riga otteniamo un'equazione del tipo

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

e quindi un'equazione del tipo

$$Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

Rimane da dimostrare che $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. I numeri reali A, B, C, che sono a volte chiamati i *parametri di giacitura* di π, sono dati esplicitamente da

$$A = \det\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad B = -\det\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad C = \det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Notiamo che per una delle caratterizzazioni del rango almeno uno di questi numeri è diverso da zero, essendo

$$\mathrm{rg}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$$

Quindi $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ che è quello che ci rimaneva da dimostrare. In conclusione: dati P_0 e $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$, siamo in grado di scrivere l'equazione cartesiana del piano per P_0 e di giacitura W. Analogamente, per quanto già osservato, siamo in grado di scrivere l'equazione del piano per tre punti P_0, P_1, P_2 non allineati: basterà scegliere P_0 come punto e $\underline{w}_1 := \overrightarrow{P_0P_1}$ e $\underline{w}_2 := \overrightarrow{P_0P_2}$ come vettori di giacitura; poi applichiamo la usuale procedura ed otteniamo *l'equazione del piano per*

[2] Il Teorema generale afferma quanto segue. Sia $\mathbf{A}$ è uno spazio affine su uno spazio vettoriale di dimensione n. Fissiamo un riferimento affine. Sia S un sottospazio affine di dimensione s. Allora i punti di S hanno coordinate che costituiscono l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di $n - s$ equazioni in n incognite con rango della matrice dei coefficienti uguale a $n - s$. Vedremo fra poco perché questo teorema è vero per i piani di uno spazio affine di dimensione 3.

tre punti non-allineati. La scriviamo esplicitamente, a costo di apparire pedanti:

$$\det \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante secondo la prima riga otteniamo un'equazione nella forma

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad \text{con} \quad (A,B,C) \neq (0,0,0)$$

come deve essere.

Notiamo infine che l'equazione di un piano è individuata a meno di un fattore di proporzionalità non-nullo; detto altrimenti, le due equazioni

$$Ax+By+Cz+D=0\,, \quad \text{e} \quad \lambda Ax+\lambda By+\lambda Cz+\lambda D=0, \;\; \lambda \neq 0$$

rappresentano lo stesso piano.

Rette affini. Saltiamo i preamboli e descriviamo le rette direttamente in coordinate. Una retta r è data assegnando un punto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ ed un sottospazio vettoriale di dimensione 1, W, di V. Tale sottospazio vettoriale è generato da un vettore non nullo $\underline{w}=(l,m,n)\neq \underline{0}$ detto *vettore direzione.* Il sottospazio vettoriale $W=\mathrm{Span}(\underline{w})$ è detto la *direzione* di r. Le coordinate di $\underline{w}$ sono, per definizione, i *parametri direttori* di r. Ovviamente sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.
Un punto P di coordinate $(x,y,z)\in\mathbb{K}^3$ appartiene a r se e solo se $\overrightarrow{P_0P}\in W$ se e solo se esiste $t\in\mathbb{K}$ tale che $\overrightarrow{P_0P}=t\underline{w}$ se e solo se, in coordinate, esiste $t\in\mathbb{K}$ tale che

$$(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)=t(l,m,n)$$

se e solo se esiste $t\in\mathbb{K}$ tale che

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(l,m,n)$$

Quindi i punti di r sono descritti in coordinate da

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(l,m,n)\,, \quad t\in\mathbb{K}\,.$$

Queste sono le equazioni *parametriche* di r. Se P_1 è un altro punto della retta, distinto da P_0, allora dalla definizione di sottospazio affine abbiamo subito che $\overrightarrow{P_0P_1}\in W$ ed essendo tale vettore non-nullo esso può essere scelto come generatore di W. Ne segue che potremo anche scrivere le equazioni della retta scegliendo $l=(x_1-x_0)$, $m=(y_1-y_0)$, $n=(z_1-z_0)$.

Per ottenere le equazioni cartesiane ragioniamo come nel caso del piano. Una retta è un sottospazio affine di dimensione 1; *a priori*, per la discussione generale fatta sui sottospazi affini, sappiamo che r sarà espressa come insieme delle soluzioni di un sistema di $3-1$ equazioni in 3 incognite di rango $3-1$. Quindi r avrà equazioni cartesiane del tipo:

$$\begin{cases} AX+BY+CZ+D=0 \\ A'X+B'Y+C'Z+D'=0 \end{cases} \qquad \text{con} \quad \mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

Per vedere questo risultato generale nel caso in esame e per trovare *esplicitamente* le equazioni ragioniamo come nel caso del piano:

$$(x,y,z)\in r \Leftrightarrow (x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\in \mathrm{Span}(\underline{w})$$

Le equazioni cartesiane sono quindi date imponendo che sia

$$rg \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1 \; .$$

Utilizziamo il teorema degli orlati: orlando un minore 1×1 non nullo nella seconda riga (certamente esistente dato che $\underline{w} \neq \underline{0}$) sappiamo che la condizione

$$rg \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1$$

è equivalente all'annullarsi dei minori di ordine 2 che *orlano* quel minore 1×1 non nullo. Se ad esempio è $l \neq 0$ otteniamo che

$$rg \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1$$

se e solo se

$$\det \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0 \, , \quad \det \begin{vmatrix} x-x_0 & z-z_0 \\ l & n \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

che è del tipo

$$\begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad r \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

come deve essere. Per vedere che $r \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$ osserviamo semplicemente che dal calcolo precedente risulta $(A, B, C) = (m, -l, 0)$ e $(A', B', C') = (n, 0, -l)$ e questi due vettori sono non-proporzionali dato che $l \neq 0$.

Viceversa, sappiamo dalla teoria generale che il sottoinsieme di $\mathbb{K}^3$ costitutito dai punti le cui coordinate soddisfano un sistema del tipo

$$\begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad r \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

è un sottospazio affine di dimensione 1 (una retta), e più precisamente la retta passante per una soluzione particolare del sistema dato e con giacitura il sottospazio 1-dimensionale

$$W = \{ \underline{w} \in \mathbb{K}^3 \mid \begin{cases} Aw^1 + Bw^2 + Cw^3 = 0 \\ A'w^1 + B'w^2 + C'w^3 = 0 \end{cases} \}.$$

Mutua posizione di rette e piani.

Proposizione 1. *Due piani π, π' di equazione cartesiana*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \, , \qquad A'x + By' + C'z + D' = 0$$

sono paralleli se e soltanto se i coefficienti di giacitura sono proporzionali e cioè se e solo se

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 1.$$

Il rango è invece uguale a due se e solo se $\pi \cap \pi' = r$, con r una retta. Se π e π' sono paralleli allora $\pi = \pi'$ oppure $\pi \cap \pi' = \emptyset$ a seconda che sia rispettivamente

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 1 \, , \qquad rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 2 \; .$$

Dimostrazione. I due piani sono paralleli se sono associati allo stesso sottospazio 2-dimensionale W. Quindi W deve avere equazione $Ax + Bx + Cx = 0$, perché associato a π, e deve avere equazione $A'x + By' + C'z = 0$, perché associato a π' [3]. Ma l'equazione di W, sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{K}^3$, è individuata a meno di un fattore di proporzionalità non-nullo; quindi $(A, B, C) = \lambda(A', B', C')$, $\lambda \neq 0$ che si riscrive anche come

$$\mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 1.$$

Viceversa, se questa condizione è soddisfatta allora π ha equazione $A'x + By' + C'z + D/\lambda = 0$; è allora chiaro che π e π' hanno la stessa giacitura e sono quindi paralleli. Abbiamo dimostrato che $\mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 1$ se e solo se π e π' sono paralleli.

Dal teorema di Rouché-Capelli otteniamo subito che i due piani non hanno punti a comune se e solo se, in aggiunta, $rg\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 2$ mentre è ovvio che essi sono lo stesso piano se e solo se $rg\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 1\,.$

Infine, abbiamo già osservato che la teoria dei sistemi lineari ci dice che il sistema

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + By' + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

ammette come insieme delle soluzioni un sottospazio affine di dimensione 1, cioè una retta, se e solo se $\mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$. La Proposizione è dimostrata.

Fascio di piani per una retta. Sia r la retta di equazioni cartesiane:

$$(2) \qquad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + By' + C'z + D' = 0 \end{cases}, \quad \text{con} \quad \mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2\,.$$

r è quindi espressa come intersezione di due piani π e π'.
È ovvio che i punti della retta r soddisfano l'equazione

$$(3) \qquad \lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(A'x + By' + C'z + D') = 0\,, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

perché $\lambda 0 + \mu 0 = 0$. Quest'equazione rappresenta quindi un piano contenente r. Viceversa, sia σ un piano contenente r e di equazione $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$. Allora tutti i punti di r soddisfano il sistema

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + By' + C'z + D' = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \end{cases}$$

Ma allora, necessariamente,

$$\mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 2$$

[3] vi ricordo che la giacitura W di un sottospazio affine S dato tramite equazioni cartesiane $A\underline{x} = \underline{b}$ si ottiene considerando il sistema omogeneo associato $A\underline{x} = \underline{0}$

(il rango non può essere 1 per la (2) e non può essere 3 perché altrimenti esisterebbe un'unica soluzione) e ne segue che esistono $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ tali che

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \lambda(A, B, C, D) + \mu(A', B', C', D')\,.$$

La conclusione di questo ragionamento è che *la totalità dei piani per r è data da (3) al variare di $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$*. La totalità dei piani per r costituisce il *fascio di piani per r*.

Fascio improprio di piani. Sia π un piano affine di equazione cartesiana

$$Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

Dalla discussione fatta nella Proposizione 1 è chiaro che la famiglia di piani π_t di equazione cartesiana

$$Ax + By + Cz + t = 0\,, \quad t \in \mathbb{K}$$

costituisce la totalità dei piani paralleli a π. La famiglia $\{\pi_t, t \in \mathbb{K}\}$ costituisce il fascio improprio dei piani di giacitura $Aw^1 + Bw^2 + Cw^3 = 0$ e cioè dei piani paralleli al piano π.

Proposizione 2.
2.1 *Sia $r = \pi \cap \pi'$ una retta e sia σ il piano di equazione cartesiana*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

Sia $W_r = \mathbb{K}(l, m, n)$ la direzione di r. Allora r è parallela a σ se e soltanto se

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0\,.$$

Equivalentemente, se e solo se

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2$$

e cioè se e soltanto se il determinante di questa matrice 3×3 *è* $= 0$.
2.2 *Se r e σ sono paralleli allora $r \subset \sigma$ o $r \cap \sigma = \emptyset$ a seconda che sia rispettivamente*

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 2 \qquad rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 3.$$

2.3 *Si ha invece che $r \cap \sigma = P$ se e soltanto se*

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$$

(e cioè il determinante è diverso da zero).

Dimostrazione.
2.1 Sia W_σ la giacitura di σ. Dire che r è parallela a σ è equivalente a dire che il sottospazio W_r è contenuto in W_σ; questo vuol dire che il vettore generatore di W_r, (l, m, n), soddisfa l'equazione cartesiana di W_σ, che è $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$; quindi r è parallela a σ se e solo se $\alpha l + \beta m + \gamma n = 0$, che è quello che si doveva dimostrare.

Se r è data tramite equazioni cartesiane, $r = \pi \cap \pi'$, allora è ovvio che $W_r = W_\pi \cap W_{\pi'}$ e quindi $W_r \subset W_\sigma$ se e solo se $W_\sigma, W_\pi, W_{\pi'}$ appartangono ad uno stesso fascio

di piani vettoriali [4], il che accade (già visto) se e solo se $rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2$. La dimostrazione di **2.1** è completa.
La dimostrazione di **2.2** segue subito dal ragionamento fatto nella discussione sul fascio di piani per una retta (per la condizione $r \subset \sigma$) e dal teorema di Rouché-Capelli (per la condizione $r \cap \sigma = \emptyset$).
La dimostrazione di **2.3** è chiara dalla teoria dei sistemi lineari, ad esempio dal Teorema di Cramer.

Proposizione 3. *Sono date due rette r e ρ di equazione rispettivamente*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \end{cases} .$$

r e ρ sono complanari se e soltanto se la matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero. Se r e ρ sono complanari allora

$$r = \rho, \qquad r \cap \rho = P, \qquad r // \rho$$

a seconda che si abbia rispettivamente

$$rg \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2 \, , \tag{4}$$

$$rg \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 3 \, , \tag{5}$$

$$rg \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 3 \quad rg \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2 \tag{6}$$

Dimostrazione.
Siano r e ρ come nell'enunciato; le due rette sono complanari se e solo esiste un piano che le contiene. Abbiamo visto che la totalità dei piani per r è il fascio di piani

$$\ell(ax + by + cz + d) + \ell'(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \ \ , (\ell, \ell') \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Denotiamo con $\pi_{(\ell,\ell')}$ il piano del fascio corrispondente alla scelta (ℓ, ℓ'). Analogamente, la totalità dei piani per r' è data da

$$\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) + \lambda'(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta') = 0 \ \ , (\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

[4] il fascio di piani vettoriali per W_r

Denotiamo con $\pi_{(\lambda,\lambda')}$ il piano del fascio corrispondente alla scelta (λ,λ').
Quindi r ed r' sono complanari se e solo se $\exists\, \ell,\ell',\lambda,\lambda'$ tali che

$$\pi_{(\ell,\ell')} = \pi_{(\lambda,\lambda')}\,.$$

Ma $\pi_{(\ell,\ell')}$ ha equazione

$$(\ell a+\ell' a')x+(\ell b+\ell' b')y+(\ell c+\ell' c')z+(\ell d+\ell' d')=0\,;$$

analogamente $\pi_{(\lambda,\lambda')}$ ha equazione

$$(\lambda\alpha+\lambda'\alpha')x+(\lambda\beta+\lambda'\beta')y+(\lambda\gamma+\lambda'\gamma')z+(\lambda\delta+\lambda'\delta')=0\,.$$

Questi due piani coincidono se e solo se esiste $t\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ tale che

$$\begin{cases}(\ell a+\ell' a')=t(\lambda\alpha+\lambda'\alpha')\\(\ell b+\ell' b')=t(\lambda\beta+\lambda'\beta')\\(\ell c+\ell' c')=t(\lambda\gamma+\lambda'\gamma')\\(\ell d+\ell' d')=t(\lambda\delta+\lambda'\delta')\end{cases}$$

Ma allora le due rette sono complanari se e solo se i quattro vettori

$$(a,b,c,d)\,,\ (a',b',c',d')\,,\ (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,,\ (\alpha',\beta',\gamma',\delta')$$

sono linearmente dipendenti. La prima parte della Proposizione è allora dimostrata.
La varie eventualità che si presentano per due rette complanari (parallele, coincidenti o incidenti) sono ora facile conseguenza del teorema di Rouché-Capelli. Vi invito a vederlo autonomamente.
Ecco comunque i dettagli.
Abbiamo visto che due rette r e ρ di equazione rispettivamente

$$\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0\\\alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta'=0\end{cases}\,.$$

sono *complanari* se e soltanto se la matrice

$$\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a'&b'&c'&d'\\\alpha&\beta&\gamma&\delta\\\alpha'&\beta'&\gamma'&\delta'\end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero. Il rango di questa matrice è quindi uguale a 2 oppure uguale a 3 (non può essere certo uguale 1 perché siamo partiti da due rette ben definite). Le due rette coincidono se e solo se il sistema dato dalle 4 equazioni in **3** incognite ha uno spazio di soluzioni (che se non vuoto sappiamo essere uno spazio affine) di dimensione 1. Ma 1=**3**-2. Applicando anche il teorema di Rouché-Capelli vediamo quindi che le due rette sono coincidenti se e solo se

$$rg\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a'&b'&c'&d'\\\alpha&\beta&\gamma&\delta\\\alpha'&\beta'&\gamma'&\delta'\end{vmatrix}=rg\begin{vmatrix}a&b&c\\a'&b'&c'\\\alpha&\beta&\gamma\\\alpha'&\beta'&\gamma'\end{vmatrix}=2\,,\tag{7}$$

Le due rette si incontrano in un punto, cioè in un sottospazio affine di dimensione 0 (e vi faccio notare che 0=**3**-3) se e solo se

$$rg\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a'&b'&c'&d'\\\alpha&\beta&\gamma&\delta\\\alpha'&\beta'&\gamma'&\delta'\end{vmatrix}=rg\begin{vmatrix}a&b&c\\a'&b'&c'\\\alpha&\beta&\gamma\\\alpha'&\beta'&\gamma'\end{vmatrix}=3\,,\tag{8}$$

Infine, le due rette sono parallele non-coincidenti se e solo se il sistema non ha soluzione e ciò accade, sempre per Rouché-Capelli, se e solo se

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 3 \quad rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2 \tag{9}$$