Corso di Laurea in Matematica. Corso di Geometria 1. a.a. 2017-18
Prof. P. Piazza

Appunti di Geometria Affine in dimensione 3.

Vi invito a rivedere i teoremi generali sui sistemi lineari, in particolare il teorema di Rouché-Capelli; sarebbe bene anche ripassare la caratterizzazione del rango in termini dei determinanti delle sottomatrici quadrate (detti *minori*) e il *Teorema degli orlati.*

Sia $\mathcal{A}^3$ lo spazio ordinario; fissiamo un punto O. $\mathcal{A}^3$ è uno spazio affine sullo spazio vettoriale dei segmenti geometrici $\mathcal{V}^3_O$ centrati in O. Fissiamo una base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ per la spazio vettoriale $\mathcal{V}^3_O \equiv \mathcal{V}_O$, con coordinate associate (x, y, z). Ovviamente rimangono determinate le coordinate di ogni vettore di $\mathcal{V}_O$ rispetto a questa base. Vediamo allora che esiste una corrispondenza biunivoca $\mathcal{A}^3 \leftrightarrow \mathbb{R}^3$ che associa ad ogni punto P le coordinate di OP rispetto a $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$. Di fatto questo ragionamento si applica ad un qualsiasi spazio affine $\mathcal{A}$ su uno spazio vettoriale V e ci dà una bigezione di $\mathcal{A}$ con $\mathbb{R}^n$, $n = \dim M$, una volta fissato un punto O ed una base in V.

Le coordinate dipendono ovviamente dalla scelta di O e dalla scelta della base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$. Si dice allora che è stato fissato un riferimento affine $RA(O, \underline{i}, \underline{j}\, \underline{k})$ con coordinate (x, y, z). Si usa anche la notazione $RA(O, x, y, z)$.

Un sottospazio affine S di $\mathcal{A}^3$ è determinato da un punto e da un sottospazio vettoriale W di $\mathcal{V}_O$ detto giacitura di S. È definito come

$$S := \{P \in \mathcal{A}^3 \,|\, \overrightarrow{QP} \in W\} \tag{1}$$

dove vi ricordo che, per definizione, nel caso specifico in esame, $\overrightarrow{QP} = OP - OQ$. Denotiamo la giacitura di S con W_S se può far comodo. I sottospazi affini di $\mathcal{A}^3$ sono i punti, le rette, i piani e $\mathcal{A}^3$ stesso, determinati dai sottospazi vettoriali di $\mathcal{V}_O$ (che sono il vettore nullo, le rette vettoriali, i piani vettoriali, e $\mathcal{V}_O$ stesso).

Piani affini. Per definizione un piano affine π dello spazio affine $\mathcal{A}^3$ è individuato da un punto Q e da un sottospazio vettoriale W di dimensione 2 in $\mathcal{V}_O$. In coordinate π è dato quindi da una terna $(x_Q, y_Q, z_Q) \in \mathbb{R}^3$ e da due vettori linearmente indipendenti $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \mathbb{R}^3$ che generano la giacitura W (quindi $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$).

Dalla definizione stessa di sottospazio affine vediamo che un punto P di coordinate $(x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$ appartiene a π se e solo se $\overrightarrow{QP} \in W$ se e solo se $OP - OQ \in W$ e ciò è vero se e solo se esiste $\underline{w} \in W$ tale che $OP - OQ = \underline{w}$ che possiamo riscrivere brevemente come $P - Q = \underline{w}$.
Vediamo quindi che i punti P di π sono descritti in coordinate da

$$\{(x_Q, y_Q, z_Q) + \underline{w}, \quad \underline{w} \in W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)\} \tag{2}$$

che riscriveremo anche come

$$\{Q + \underline{w}, \quad \underline{w} \in W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)\}\,.$$

Ovviamente ciò vuol dire che π è dato da

$$\{(x_Q, y_Q, z_Q) + s\underline{w}_1 + t\underline{w}_2, \quad s, t \in \mathbb{R}\} \tag{3}$$

Queste sono le *equazioni parametriche* di π. Se $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ e $\underline{w}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\underline{w}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ allora scriviamo esplicitamente le equazioni parametriche di π come

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2) \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Se sono assegnati tre punti *non allineati* P_0, P_1, P_2 di π, allora possiamo scegliere, ad esempio, $Q = P_0$ e

$$\underline{w}_1 = P_1 - P_0\,, \qquad \underline{w}_2 = P_2 - P_0.$$

Infatti, dalla (1),

$$P_1 - P_0 \in W\,, \quad P_2 - P_0 \in W\,;$$

inoltre dato che i punti sono non allineati si ha subito che i due vettori $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ sono non-proporzionali e sono quindi una base per W.

Per quel che concerne le equazioni cartesiane, vedremo fra poco che π è ottenuto come l'insieme dei punti le cui coordinate costituiscono l'insieme delle soluzioni di *una* equazione lineare

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad \text{con} \quad \mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix} = 1\,.$$

[1] Viceversa, abbiamo visto che l'insieme S costituito dai punti le cui coordinate soddisfano *una* equazione lineare

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad \text{con} \quad \mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix} = 1$$

è un sottospazio affine di dimensione 3-1=2. Più precisamente, S è il piano passante per una soluzione particolare di $Ax + By + Cz + D = 0$ e con giacitura data in coordinate dal sottospazio vettoriale W di equazioni cartesiane

$$Aw^1 + Bw^2 + Cw^3 = 0.$$

Sia π un piano affine per P_0 e di giacitura $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$. Per ottenere *esplicitamente* l'equazione cartesiana di π a partire da P_0 e $\underline{w}_1, \underline{w}_2$, e dimostrare quindi il caso particolare del teorema generale, osserviamo nuovamente che si ha:

$$(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)\,.$$

Ciò accade se e solo se la matrice 3×3 con righe uguali a $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) ha rango 2. Ciò è equivalente a richiedere che

$$\det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando secondo la prima riga otteniamo un'equazione del tipo

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

e quindi un'equazione del tipo

$$Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

[1] Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale di dimensione n. Fissiamo un riferimento affine. Sia S un sottospazio affine di dimensione $n - k$. Sappiamo dalla teoria generale che i punti di S hanno coordinate che costituiscono l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di k equazioni in n incognite con rango della matrice dei coefficienti uguale a k. Vedremo fra poco perché questo teorema è vero per i piani di $\mathcal{A}^3$.

Rimane da dimostrare che $(A,B,C) \neq (0,0,0)$. I numeri reali A, B, C, che sono a volte chiamati i *parametri di giacitura* di π, sono dati esplicitamente da

$$A = \det \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad B = -\det \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad C = \det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Notiamo che per una delle caratterizzazioni del rango almeno uno di questi numeri è diverso da zero, essendo

$$\operatorname{rg} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$$

Quindi $(A,B,C) \neq (0,0,0)$ che è quello che ci rimaneva da dimostrare. In conclusione: dati P_0 e $W = \operatorname{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$, siamo in grado di scrivere l'equazione cartesiana del piano per P_0 e di giacitura W. Analogamente, per quanto già osservato, siamo in grado di scrivere l'equazione del piano per tre punti P_0, P_1, P_2 non allineati: basterà scegliere P_0 come punto e $\underline{w}_1 := P_1 - P_0$ e $\underline{w}_2 := P_2 - P_0$ come vettori di giacitura; poi applichiamo la usuale procedura ed otteniamo *l'equazione del piano per tre punti non-allineati.* La scriviamo esplicitamente, a costo di apparire pedanti:

$$\det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante secondo la prima riga otteniamo un'equazione nella forma

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{con} \quad (A,B,C) \neq (0,0,0)$$

come deve essere.

Notiamo infine che l'equazione di un piano è individuata a meno di un fattore di proporzionalità non-nullo; detto altrimenti, le due equazioni

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad \text{e} \quad \lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + \lambda D = 0, \;\; \lambda \neq 0$$

rappresentano lo stesso piano.

Rette affini. Saltiamo i preamboli e descriviamo le rette direttamente in coordinate. Una retta r è data assegnando un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ed un sottospazio vettoriale di dimensione 1, W, di $\mathcal{V}_O$. Tale sottospazio vettoriale è generato da un vettore non nullo $\underline{w} = (l, m, n) \neq \underline{0}$ detto *vettore direzione*. Il sottospazio vettoriale $W = \operatorname{Span}(\underline{w}) := \mathbb{R}\underline{w} \subset \mathbb{R}^3$ è detto la *direzione* di r. Le coordinate di $\underline{w}$ sono, per definizione, i *parametri direttori* di r. Ovviamente sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.
Un punto P di coordinate $(x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$ appartiene a r se e solo se $\overrightarrow{P_0P} \in W$ se e solo se $OP - OP_0 \in W$ se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $OP - OP_0 = t\underline{w}$ se e solo se, con piccolo abuso di notazione, $P = P_0 + t\underline{w}$. Le equazioni parametriche di tale retta sono quindi date da

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n) \quad t \in \mathbb{R}$$

dove, come al solito, denotiamo le triple come righe e non come colonne. Se P_1 è un altro punto della retta, distinto da P_0, allora dalla definizione di sottospazio affine abbiamo subito che $P_1 - P_0 \in W$ ed essendo tale vettore non-nullo esso può essere scelto come generatore di W. Ne segue che potremo anche scrivere le equazioni della retta scegliendo $l = (x_1 - x_0)$, $m = (y_1 - y_0)$, $n = (z_1 - z_0)$.

Per ottenere le equazioni cartesiane ragioniamo come nel caso del piano. Una retta è un sottospazio affine di dimensione 1 ed 1=3-2; *a priori*, per la discussione generale fatta sui sottospazi affini, sappiamo che r sarà espressa come insieme delle soluzioni di un sistema di k equazioni in 3 incognite di rango k, con $k = 2$. Quindi r avrà equazioni cartesiane del tipo:

$$\begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \text{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

Per dimostrare questo risultato generale nel caso in esame e per trovare *esplicitamente* le equazioni ragioniamo come nel caso del piano:

$$(x, y, z) \in r \Leftrightarrow (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \text{Span}(\underline{w})$$

Le equazioni cartesiane sono quindi date imponendo che sia

$$rg\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1\ .$$

Utilizziamo il teorema degli orlati: orlando un minore 1×1 non nullo nella seconda riga (certamente esistente dato che $\underline{w} \neq \underline{0}$) sappiamo che la condizione

$$rg\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1$$

è equivalente all'annullarsi dei minori di ordine 2 che *orlano* quel minore 1×1 non nullo. Se ad esempio è $l \neq 0$ otteniamo che

$$rg\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1$$

se e solo se

$$\det\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0\,, \quad \det\begin{vmatrix} x - x_0 & z - z_0 \\ l & n \end{vmatrix} = 0\,,$$

che è del tipo

$$\begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad r\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

come deve essere [2].

Viceversa, sappiamo dalla teoria generale che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ costitutito dai punti le cui coordinate soddisfano un sistema del tipo

$$\begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad r\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

è un sottospazio affine di dimensione 1 (una retta), e più precisamente la retta passante per una soluzione particolare del sistema dato e con giacitura il sottospazio 1-dimensionale

$$W = \{\underline{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} Aw^1 + Bw^2 + Cw^3 = 0 \\ A'w^1 + B'w^2 + C'w^3 = 0 \end{cases} \}.$$

Mutua posizione di rette e piani.

---

[2] per capire perché $r\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$ notiamo che $(A, B, C) = (m, -l, 0)$ e $(A', B', C') = (n, 0, -l)$ e questi due vettori sono non-proporzionali dato che $l \neq 0$

Proposizione 1. *Due piani π, π' di equazione cartesiana*

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \qquad A'x + By' + C'z + D' = 0$$

sono paralleli se e soltanto se i coefficienti di giacitura sono proporzionali e cioè se e solo se

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 1.$$

Il rango è invece uguale a due se e solo se $\pi \cap \pi' = r$, con r una retta. Se π e π' sono paralleli allora $\pi = \pi'$ oppure $\pi \cap \pi' = \emptyset$ a seconda che sia rispettivamente

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 1\,, \qquad rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 2\,.$$

Dimostrazione. I due piani sono paralleli se sono associati allo stesso sottospazio 2-dimensionale W. Quindi W deve avere equazione $Ax + Bx + Cx = 0$ perché associato a π e deve avere equazione $A'x + By' + C'z = 0$ perché associato a π' [3]. Ma l'equazione di W, sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$, è individuata a meno di un fattore di proporzionalità non-nullo; quindi $(A, B, C) = \lambda(A', B', C')$, $\lambda \neq 0$ che si riscrive anche come

$$\text{rg} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 1.$$

Viceversa, se questa condizione è soddisfatta allora π ha equazione $A'x + By' + C'z + D/\lambda = 0$; è allora chiaro che π e π' hanno la stessa giacitura e sono quindi paralleli. Abbiamo dimostrato che $\text{rg} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 1$ se e solo se π e π' sono paralleli.

Dal teorema di Rouché-Capelli otteniamo subito che i due piani non hanno punti a comune se e solo se, in aggiunta, $rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 2$ mentre è ovvio che essi sono lo stesso piano se e solo se $rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 1\,.$

Infine, abbiamo già osservato che la teoria dei sistemi lineari ci dice che il sistema

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + By' + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

ammette come insieme delle soluzioni un sottospazio affine di dimensione 1, cioè una retta, se e solo se $\text{rg} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$. La Proposizione è dimostrata.

Osservazione 1. Sia r la retta di equazioni cartesiane:

$$(4) \qquad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + By' + C'z + D' = 0 \end{cases}, \quad \text{con } \text{rg} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2\,.$$

r è quindi espressa come intersezione di due piani π e π'.
È ovvio che i punti della retta r soddisfano l'equazione

$$(5) \qquad \lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(A'x + By' + C'z + D') = 0\,, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

[3] vi ricordo che la giacitura W di un sottospazio affine S dato tramite equazioni cartesiane $A\underline{x} = \underline{b}$ si ottiene considerando il sistema omogeneo associato $A\underline{x} = \underline{0}$

perché $\lambda 0 + \mu 0 = 0$. Quest'equazione rappresenta quindi un piano contenente r. Viceversa, sia σ un piano contenente r e di equazione $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$. Allora tutti i punti di r soddisfano il sistema

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + By' + C'z + D' = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \end{cases}$$

Ma allora, necessariamente,

$$\mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 2$$

(il rango non può essere 1 per la (4) e non può essere 3 perché altrimenti esisterebbe un'unica soluzione) e ne segue che esistono $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tali che

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \lambda(A, B, C, D) + \mu(A', B', C', D')\,.$$

La conclusione di questo ragionamento è che *la totalità dei piani per r è data da (5) al variare di $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$*. La totalità dei piani per r costituisce il *fascio di piani per r*.

Proposizione 2.

2.1 *Sia $r = \pi \cap \pi'$ una retta e sia σ il piano di equazione cartesiana*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

Sia $W_r = \mathbb{R}(l, m, n)$ la direzione di r. Allora r è parallela a σ se e soltanto se

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0\ .$$

Equivalentemente, se e solo se

$$rg\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2$$

e cioè se e soltanto se il determinante di questa matrice 3×3 è $= 0$.

2.2 *Se r e σ sono paralleli allora $r \subset \sigma$ o $r \cap \sigma = \emptyset$ a seconda che sia rispettivamente*

$$rg\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 2 \qquad rg\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 3.$$

2.3 *Si ha invece che $r \cap \sigma = P$ se e soltanto se*

$$rg\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$$

(e cioè il determinante è diverso da zero).

Dimostrazione.

2.1 Sia W_σ la giacitura di σ. Dire che r è parallela a σ è equivalente a dire che il sottospazio W_r è contenuto in W_σ; questo vuol dire che il vettore generatore di W_r, (l, m, n), soddisfa l'equazione cartesiana di W_σ, che è $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$; quindi r è parallela a σ se e solo se $\alpha l + \beta m + \gamma n = 0$, che è quello che si doveva dimostrare.

Se r è data tramite equazioni cartesiane, $r = \pi \cap \pi'$, allora è ovvio che $W_r = W_\pi \cap W_{\pi'}$ e quindi $W_r \subset W_\sigma$ se e solo se $W_\sigma, W_\pi, W_{\pi'}$ appartangono ad uno stesso fascio

di piani [4], il che accade (vedi osservazione 1) se e solo se $rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2.$
La dimostrazione di **2.1** è completa.
La dimostrazione di **2.2** segue subito dall'Osservazione 1 (per la condizione $r \subset \sigma$) e dal teorema di Rouché-Capelli (per la condizione $r \cap \sigma = \emptyset$).
La dimostrazione di **2.3** è ovvia dalla teoria dei sistemi lineari.

Proposizione 3. *Sono date due rette r e ρ di equazione rispettivamente*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \end{cases} .$$

r e ρ sono complanari se e soltanto se la matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero. Se r e ρ sono complanari allora

$$r = \rho, \qquad r \cap \rho = P, \qquad r//\rho$$

a seconda che si abbia rispettivamente

$$rg \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2 \,, \tag{6}$$

$$rg \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 3 \,, \tag{7}$$

$$rg \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 3 \quad rg \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2 \tag{8}$$

Dimostrazione.
Siano r e ρ come nell'enunciato; le due rette sono complanari se e solo esiste un piano che le contiene. Abbiamo visto nell'Osservazione 1 che la totalità dei piani per r è il fascio di piani

$$\ell(ax + by + cz + d) + \ell'(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \;\; , (\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Denotiamo con $\pi_{(\ell,\ell')}$ il piano del fascio corrispondente alla scelta (ℓ, ℓ'). Analogamente, la totalità dei piani per r' è data da

$$\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) + \lambda'(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta') = 0 \;\; , (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

[4] il fascio di piani per W_r

Denotiamo con $\pi_{(\lambda,\lambda')}$ il piano del fascio corrispondente alla scelta (λ, λ').
Quindi r ed r' sono complanari se e solo se $\exists\, \ell, \ell', \lambda, \lambda'$ tali che

$$\pi_{(\ell,\ell')} = \pi_{(\lambda,\lambda')}\,.$$

Ma $\pi_{(\ell,\ell')}$ ha equazione

$$(\ell a + \ell' a')x + (\ell b + \ell' b')y + (\ell c + \ell' c')z + (\ell d + \ell' d') = 0\,;$$

analogamente $\pi_{(\lambda,\lambda')}$ ha equazione

$$(\lambda\alpha + \lambda'\alpha')x + (\lambda\beta + \lambda'\beta')y + (\lambda\gamma + \lambda'\gamma')z + (\lambda\delta + \lambda'\delta') = 0\,.$$

Questi due piani coincidono se e solo se esiste $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$\begin{cases} (\ell a + \ell' a') = t(\lambda\alpha + \lambda'\alpha') \\ (\ell b + \ell' b') = t(\lambda\beta + \lambda'\beta') \\ (\ell c + \ell' c') = t(\lambda\gamma + \lambda'\gamma') \\ (\ell d + \ell' d') = t(\lambda\delta + \lambda'\delta') \end{cases}$$

Ma allora le due rette sono complanari se e solo se i quattro vettori

$$(a, b, c, d)\,,\ (a', b', c', d')\,,\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta)\,,\ (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$$

sono linearmente dipendenti. La prima parte della Proposizione è allora dimostrata.

La varie eventualità che si presentano per due rette complanari (parallele, coincidenti o incidenti) sono ora facile conseguenza del teorema di Rouché-Capelli. Vi invito a vederlo autonomamente.
Ecco comunque i dettagli.
Abbiamo visto che due rette r e ρ di equazione rispettivamente

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \end{cases}\,.$$

sono *complanari* se e soltanto se la matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero. Il rango di questa matrice è quindi uguale a 2 oppure uguale a 3 (non può essere certo uguale 1 perché siamo partiti da due rette ben definite). Le due rette coincidono se e solo se il sistema dato dalle 4 equazioni in **3** incognite ha uno spazio di soluzioni (che se non vuoto sappiamo essere uno spazio affine) di dimensione 1. Ma 1=**3**-2. Applicando anche il teorema di Rouché-Capelli vediamo quindi che le due rette sono coincidenti se e solo se

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2\,, \tag{9}$$

Le due rette si incontrano in un punto, cioè in un sottospazio affine di dimensione 0 (e vi faccio notare che 0=**3**-3) se e solo se

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 3\,, \tag{10}$$

Infine, le due rette sono parallele non-coincidenti se e solo se il sistema non ha soluzione e ciò accade, sempre per Rouché-Capelli, se e solo se

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 3 \quad rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2 \tag{11}$$