Corso di Laurea in Fisica. Corso di Geometria. a.a. 2012-13
Prof. P. Piazza

Appunti di Geometria Affine.

Introduzione. Il nostro punto di partenza è stato lo *spazio ordinario* e le sue proprietà elementari. In una prima approssimazione possiamo pensare allo spazio ordinario come allo spazio fisico circostante. Le sue proprietà elementari nascono dall'esperienza: i concetti geometrici di punto, retta, piano, la loro mutua posizione etc... nascono da nozioni concrete tratte dalla considerazione dello spazio fisico. Da un punto di vista matematico queste proprietà elementari, (ad esempio "per due punti passa una ed una sola retta") non possono essere *dimostrate* sulla base dell'esperienza fisica. Il primo a capire questa difficoltà fu Euclide il quale estrasse alcuni *assiomi* (o *postulati*) fondamentali sui quali fondare rigorosamente la geometria. Gli assiomi, insieme alle proprietà che da essi si possono dedurre, formano il complesso della *Geometria Euclidea*, che è quella che si studia alla scuola media e al liceo. Seguendo la trattazione data da David Hilbert nel suo celebre "Fondamenti della geometria", gli assiomi della geometria euclidea si possono riassumere in cinque gruppi

1. *Assiomi di appartenenza* (del tipo "per tre punti non-allineati passa uno ed un solo piano"...).
2. *Assiomi di ordine* (permettono di fissare un verso su una retta)
3. *Assiomi di congruenza* (danno la nozione di confronto ed uguaglianza fra segmenti e fra angoli).
4. *Assiomi di continuità* (quelli dei numeri reali).
5. *Assioma delle parellele.*

Lo spazio è quindi un insieme i cui elementi sono detti punti e nel quale sono dati alcuni sottoinsiemi (rette, piani, segmenti...) verificanti questi 5 gruppi di assiomi. A priori ci possono essere varie geometrie euclidee: Hilbert dimostra che due geometrie euclidee differenti sono di fatto equivalenti e possono essere assimilate. Esiste quindi una sola geometria euclidea che è proprio quella che era nella testa di Euclide verso il 300 A.C.

Passiamo alla geometria affine. Concentriamoci per un momento sugli assiomi del *terzo* gruppo, gli assiomi di congruenza. Fra questi assiomi di congruenza ci sono quelli che fanno intevenire la nozione di uguaglianza e confronto di segmenti che si trovano su una stessa retta oppure su rette parallele. Una nozione o una proprietà dello spazio è detta *affine* se, insieme agli assiomi 1, 2, 4, 5, fa intevenire soltanto gli assiomi di congruenza appena citati; *non* fa quindi intevenire gli assiomi di congruenza che stabiliscono il confronto e l'uguaglianza fra segmenti appartenenti a rette *non-paralle* ; non fa neppure intervenire la nozioni di confronto ed uguaglianza fra angoli. Essere un triangolo isoscele, ad esempio, non è una proprietà affine. La nozione di parallelogramma è, invece, affine. Tutte le proprietà dedotte per mezzo dei vettori di $\mathcal{V}_O$ sono affini. Le proprietà di incidenza e parallelismo sono affini. Si noti che il teorema di Pitagora non ha senso nella geometria affine (non possiamo confrontare le lunghezze dei lati di un triangolo perché le rette sui quali giacciono non sono parallele, né possiamo dare un senso alla nozione di triangolo rettangolo, non potendo misurare gli angoli).

Lo spazio ordinario insieme agli assiomi 1,2,4,5 e agli assiomi di congruenza "ridotti" appena citati è detto *spazio affine*[1] La geometria affine è lo studio delle proprietà delle figure che si possono dedurre dagli assiomi. Per lo spazio affine si usa a volte la notazione $\mathcal{A}^3$ (invece di $\mathcal{E}^3$, che si utilizza per lo spazio euclideo).

Equazioni di rette e piani. Vi invito a rileggere attentamente la sezione introduttiva 2.3, le due sezioni sui sottospazi affini di uno spazio vettoriale e loro equazioni (parametriche e cartesiane) [2]. Qui vi ricorderò soltanto che un sottospazio affine L di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme della forma

$$L = \underline{v}_0 + W = \{\underline{v}_0 + \underline{w} \,|\, \underline{w} \in W\}$$

con $\underline{v}_0 \in V$ e W un sottospazio di V. W è detto *sottospazio di giacitura* di L o anche, semplicemente, *sottospazio associato a* L. Si dice anche che L è *parallelo* a W e che L è stato ottenuto traslando tramite $\underline{v}_0$ il sottospazio W. Si pone $\dim L := \dim W$. Infine, diremo che due sottospazi affini L_1 e L_2 di giacitura W_1 e W_2 rispettivamente sono *paralleli* se $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$. In particolare, se L_1 e L_2 hanno la stessa dimensione allora L_1 e L_2 sono paralleli se $W_1 = W_2$. Se $\dim L_1 < \dim L_2$ allora L_1 e L_2 sono paralleli se $W_1 \subset W_2$.

Fissiamo un punto O nello spazio affine $\mathcal{A}^3$ ed una base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ per la spazio vettoriale $\mathcal{V}^3_O \equiv \mathcal{V}_O$. Esiste allora una corrispondenza biunivoca di insiemi:

$$\mathcal{A}^3 \leftrightarrow \mathcal{V}_O$$

che associa al **punto** $P \in \mathcal{A}^3$ il **vettore** $\underline{OP} \in \mathcal{V}_O$. In particolare il punto O è trasformato nel vettore nullo di $\mathcal{V}_O$.
Questa corrispondenza biunivoca trasforma i punti dello spazio, nei vettori di $\mathcal{V}_O$; le rette dello spazio, nei sottospazi affini di dimensione 1 di $\mathcal{V}_O$; i piani dello spazio, nei sottospazi affini di dimensione 2 di $\mathcal{V}_O$. Inoltre trasforma le rette (rispettiv. i piani) passanti per il punto O, nei sottospazi vettoriali di dimensione 1 (rispettiv. 2) di $\mathcal{V}_O$.

Riassumendo: studiare le proprietà geometriche di punti, rette e piani in $\mathcal{A}^3$ è equivalente a studiare le proprietà geometriche dei sottospazi affini di $\mathcal{V}_O$.

Fissiamo ora una base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ per lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$. Rimangono allora determinate le coordinate di ogni vettore di $\mathcal{V}_O$ rispetto a questa base. Le coordinate fissano un isomorfismo di spazi vettoriali $\mathcal{V}_O \leftrightarrow \mathbb{R}^3$ che associa a $\underline{v} \in \mathcal{V}_O$ le coordinate (x, y, z) di $\underline{v}$ rispetto alla fissata base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$. Questo isomorfismo trasforma sottospazi affini di $\mathcal{V}_O$ in sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$. Mettendo insieme le due corrispondenze biunivoche

$$\mathcal{A}^3 \leftrightarrow \mathcal{V}_O \leftrightarrow \mathbb{R}^3$$

vediamo che esiste una corrispondenza biunivoca $\mathcal{A}^3 \leftrightarrow \mathbb{R}^3$ che associa ad ogni punto P le coordinate di $\underline{OP}$ rispetto a $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ e *che trasforma punti, rette e piani di* $\mathcal{A}^3$ *in sottospazi affini di* $\mathbb{R}^3$ *di dimensione rispettivamente 0,1,2.*
Inoltre le rette (rispet. i piani) di $\mathcal{A}^3$ passanti per il punto O sono trasformati in sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 (rispet. 2).

---

[1] di nuovo, qui dovremmo dire: un insieme di punti verificante 1,2,3,5 e gli assiomi di congruenza ridotti è uno spazio affine....

[2] Abate- de Fabritiis §6.4 e 6.5; vi invito anche a rividere il teorema di Rouché-Capelli, il teorema generale sui sistemi lineari (Teorema di struttura); sarebbe bene anche ripassare il *Teorema degli orlati*

Le coordinate dipendono dalla scelta di O e dalla scelta della base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$. Si dice allora che è stato fissato un riferimento affine $RA(O, \underline{i}, \underline{j}\, \underline{k})$ con coordinate (x, y, z). Si usa anche la notazione $RA(O, x, y, z)$.

Scopriamo quindi che un piano π dello spazio è individuato da un vettore $\underline{OQ}$ e da un sottospazio vettoriale di dimensione 2 in $\mathcal{V}_O$ e quindi, in coordinate, da una terna $(x_Q, y_Q, z_Q) \in \mathbb{R}^3$ e da due vettori linearmente indipendenti $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \mathbb{R}^3$. Il sottospazio vettoriale 2-dimensionale $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ è quindi la *giacitura* del piano π; i due vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ sono, per definizione, due *vettori di giacitura* per π.

È bene tenere a mente la descrizione dei punti di π data dalla definizione stessa di sottospazio affine: i punti P di π sono descrtti in coordinate da

$$\{(x_Q, y_Q, z_Q) + \underline{w}, \quad \underline{w} \in W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)\} \tag{1}$$

che riscriveremo brevemente come

$$\{Q + \underline{w}, \quad \underline{w} \in W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)\}\,.$$

In particolare, se sono assegnati tre punti *non allineati* P_0, P_1, P_2 di π, allora possiamo scegliere, ad esempio, $Q = P_0$ e

$$\underline{w}_1 = P_1 - P_0\,, \qquad \underline{w}_2 = P_2 - P_0.$$

Infatti, dalla (1) segue che

$$P_1 - P_0 \in W\,, \quad P_2 - P_0 \in W\,;$$

inoltre dato che i punti sono non allineati si ha subito che i due vettori $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ sono non-proporzionali e sono quindi una base per W.

Siano $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $\underline{w}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\underline{w}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ una base di W, sottospazio 2-dimensionale di $\mathbb{R}^3$, e sia π il piano da essi individuato. Allora π ha equazioni parametriche

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2) \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Per quel che concerne le equazioni cartesiane, sappiamo dalla teoria che π è ottenuto come insieme delle soluzioni di un sistema lineare (in generale non-omogeneo) di k equazioni in 3 incognite con rango della matrice dei coefficienti uguale a k e con $k = 3 - \dim W = 3 - 2 = 1$. In altre parole, π è ottenuto come insieme delle soluzioni di *una* equazione lineare

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad \text{con} \quad \mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix} = 1\,.$$

Per ottenere *esplicitamente* l'equazione cartesiana di π a partire da P_0 e $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ osserviamo nuovamente che dalla (1) si ha:

$$(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)\,;$$

Si può ora procedere in due modi, il primo dei quali vi dovrebbe essere ben noto:

(1) imponiamo che il sistema in (α, β)

$$\alpha \underline{w}_1 + \beta \underline{w}_2 = \begin{vmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{vmatrix}$$

abbia soluzioni e quindi scriviamo

$$\left|\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & x-x_0 \\ b_1 & b_2 & y-y_0 \\ c_1 & c_2 & z-z_0 \end{array}\right.$$

riduciamo con Gauss e imponiamo la compatibilità.

(2) imponiamo che la matrice 3×3 con righe uguali a $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) abbia rango 2. Ciò è equivalente a richiedere che

$$\det \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando secondo la prima riga otteniamo un'equazione del tipo

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ e quindi un'equazione del tipo

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{con} \quad (A, B, C) \neq (0, 0, 0)\,.$$

La ragione per la quale $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ è spiegata qui sotto. I numeri reali A, B, C sono detti *parametri di giacitura* e nel caso specifico sono dati esplicitamente da

$$a = \det \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad b = -\det \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad c = \det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Notiamo che per il teorema degli orlati almeno uno di questi numeri è diverso da zero, essendo

$$\operatorname{rg} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$$

In conclusione: dati P_0 e $W = \operatorname{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$, siamo in grado di scrivere l'equazione cartesiana del piano per P_0 parallelo a W. Analogamente, siamo in grado di scrivere l'equazione del piano per tre punti P_0, P_1, P_2 non allineati: basterà scegliere P_0 come punto e $\underline{w}_1 := P_1 - P_0$ e $\underline{w}_2 := P_2 - P_0$ come vettori di giacitura; poi applichiamo la usuale procedura ed otteniamo *l'equazione del piano per tre punti non-allineati*:

$$\det \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante secondo la prima riga abbiamo l'equazione nella forma

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{con} \quad (A, B, C) \neq (0, 0, 0)\,.$$

Supponiamo viceversa che π sia dato tramite un'equazione cartesiana

$$Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

Allora sappiamo che π è il piano passante per una soluzione particolare Q dell'equazione data e con giacitura

$$W = \{\underline{w} \in \mathbb{R}^3 \mid Aw^1 + Bw^2 + Cw^3 = 0\}.$$

Il punto Q e i due vettori di giacitura si ottengono applicando il teorema di struttura all'equazione $Ax + By + Cz + D = 0$ che definisce il piano.

Notiamo infine che l'equazione di un piano è individuata a meno di un fattore di proporzionalità non-nullo; detto altrimenti, le due equazioni

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad \text{e} \quad \lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + \lambda D = 0, \;\; \lambda \neq 0$$

rappresentano lo stesso piano.

Una retta r è data assegnando un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ed un *vettore direzione* $\underline{w} = (l, m, n) \neq \underline{0}$. Il sottospazio vettoriale $W = \mathrm{Span}(\underline{w}) := \mathbb{R}\underline{w} \subset \mathbb{R}^3$ è detto la *direzione* di r. Le coordinate di $\underline{w}$ sono, per definizione, i *parametri direttori* di r. Ovviamente sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Le equazioni parametriche di tale retta sono date da

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n) \quad t \in \mathbb{R}$$

dove, come al solito, denotiamo le triple come righe e non come colonne. Se P_1 è un altro punto della retta, distinto da P_0, allora dalle equazione parametriche abbiamo subito che $P_1 - P_0 \in W$; essendo non-nullo è quindi un generatore di W. Ne segue che potremo anche scrivere le equazioni della retta scegliendo $l = (x_1 - x_0)$, $m = (y_1 - y_0)$, $n = (z_1 - z_0)$.

Per ottenere le equazioni cartesiane ragioniamo come nel caso del piano: *a priori*, per la discussione generale fatta sui sottospazi affini, sappiamo che r sarà espressa come insieme delle soluzioni di un sistema (in generale non-omogeneo) di k equazioni in 3 incognite di rango k, con $k = 3 - \dim W = 3 - 1 = 2$. Quindi r avrà equazioni cartesiane del tipo:

$$\begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

Per determinare *esplicitamente* queste equazioni ragioniamo come nel caso del piano:

$$(x, y, z) \in r \Leftrightarrow (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{Span}(\underline{w})$$

Le equazioni cartesiane sono quindi date imponendo che sia

$$rg\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1\,.$$

Possiamo ora procedere in due modi

(1) riduciamo con Gauss

$$\left|\begin{array}{c|c} l & x - x_0 \\ m & y - y_0 \\ n & z - z_0 \end{array}\right.$$

e applichiamo la compatibilità.

(2) applichiamo il teorema degli orlati: orlando un minore 1×1 non nullo nella seconda riga (certamente esistente dato che $\underline{w} \neq \underline{0}$) la condizione

$$rg\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1$$

si traduce in un sistema di due equazioni non omogenee: ad esempio se $l \neq 0$ allora otteniamo

$$\det\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0\,, \quad \det\begin{vmatrix} x - x_0 & z - z_0 \\ l & n \end{vmatrix} = 0\,,$$

che è del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{array} \right. \qquad \text{con} \quad r \left| \begin{array}{ccc} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{array} \right| = 2$$

come deve essere [3].

Viceversa, sappiamo dalla teoria generale che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ costitutito dai punti le cui coordinate soddisfano un sistema del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{array} \right. \qquad \text{con} \quad r \left| \begin{array}{ccc} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{array} \right| = 2$$

è un sottospazio affine di dimensione 1 (una retta), e più precisamente la retta ottenuta traslando tramite una soluzione particolare del sistema dato il sottospazio 1-dimensionale

$$W = \{ \underline{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{l} Aw^1 + Bw^2 + Cw^3 = 0 \\ A'w^1 + B'w^2 + C'w^3 = 0 \end{array} \right. \}.$$

(Utilizzare come al solito il teorema di struttura.)

Studiamo ora la *mutua posizione di rette e piani.*

Proposizione 1. *Due piani π, π' di equazione cartesiana*

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \qquad A'x + By' + C'z + D' = 0$$

sono paralleli se e soltanto se i coefficienti di giacitura sono proporzionali e cioè se e solo se

$$rg \left| \begin{array}{ccc} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{array} \right| = 1.$$

Il rango è invece uguale a due se e solo se $\pi \cap \pi' = r$, con r una retta. Se π e π' sono paralleli allora $\pi = \pi'$ oppure $\pi \cap \pi' = \emptyset$ a seconda che sia rispettivamente

$$rg \left| \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{array} \right| = 1\,, \qquad rg \left| \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{array} \right| = 2\,.$$

Dimostrazione. I due piani sono paralleli se sono associati allo stesso sottospazio 2-dimensionale W. Quindi W deve avere equazione $Ax + Bx + Cx = 0$ perché associato a π e deve avere equazione $A'x + By' + C'z = 0$ perché associato a π' [4]. Ma l'equazione di W, sottospazio di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$, è individuata a meno di un fattore di proporzionalità non-nullo; quindi $(A, B, C) = \lambda(A', B', C')$, $\lambda \neq 0$ che si riscrive anche come

$$\mathrm{rg} \left| \begin{array}{ccc} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{array} \right| = 1.$$

Viceversa, se questa condizione è soddisfatta allora π ha equazione $A'x + By' + C'z + D/\lambda = 0$; è allora chiaro che π e π' hanno la stessa giacitura e sono quindi

[3] per capire perché $r \left| \begin{array}{ccc} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{array} \right| = 2$ notiamo che $(A, B, C) = (m, -l, 0)$ e $(A', B', C') = (n, 0, -l)$ e questi due vettori sono non-proporzionali dato che $l \neq 0$

[4] vi ricordo che la giacitura W di un sottospazio affine L dato tramite equazioni cartesiane $A\underline{x} = \underline{b}$ si ottiene considerando il sistema omogeneo associato $A\underline{x} = \underline{0}$

paralleli. Abbiamo dimostrato che $\mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 1$ se e solo se π e π' sono paralleli.

Dal teorema di Rouché-Capelli otteniamo subito che i due piani non hanno punti a comune se e solo se, in aggiunta, $rg\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 2$ mentre è ovvio che essi sono lo stesso piano se e solo se $rg\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 1$.

Infine, abbiamo già osservato che la teoria dei sistemi lineari ci dice che il sistema

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + By' + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

ammette come insieme delle soluzioni un sottospazio affine di dimensione 1, cioè una retta, se e solo se $\mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$. La Proposizione è dimostrata.

Osservazione 1. Sia r la retta di equazioni cartesiane:

$$(2) \qquad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + By' + C'z + D' = 0 \end{cases}, \quad \text{con} \quad \mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2\,.$$

r è quindi espressa come intersezione di due piani π e π'.
È ovvio che i punti della retta r soddisfano l'equazione

$$(3) \qquad \lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(A'x + By' + C'z + D') = 0\,, \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

Quest'equazione rappresenta quindi un piano contenente r. Viceversa, sia σ un piano contenente r e di equazione $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$. Allora tutti i punti di r soddisfano il sistema

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + By' + C'z + D' = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \end{cases}$$

Ma allora, necessariamente,

$$\mathrm{rg}\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 2$$

(il rango non può essere 1 per la (2) e non può essere 3 perché altrimenti esisterebbe un'unica soluzione) e ne segue che esistono $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ tali che

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \lambda(A, B, C, D) + \mu(A', B', C', D')\,.$$

La conclusione di questo ragionamento è che *la totalità dei piani per r è data da (3) al variare di $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*. La totalità dei piani per r costituisce il *fascio di piani per r*.

Proposizione 2.
2.1 *Sia $r = \pi \cap \pi'$ una retta e sia σ il piano di equazione cartesiana*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

Sia $W_r = \mathbb{R}(l, m, n)$ la direzione di r. Allora r è parallela a σ se e soltanto se

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0\,.$$

Equivalentemente, se e solo se

$$rg\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2$$

e cioè se e soltanto se il determinante di questa matrice 3×3 *è* $= 0$.
2.2 *Se* r *e* σ *sono paralleli allora* $r \subset \sigma$ *o* $r \cap \sigma = \emptyset$ *a seconda che sia rispettivamente*

$$rg\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 2 \qquad rg\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 3.$$

2.3 *Si ha invece che* $r \cap \sigma = P$ *se e soltanto se*

$$rg\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$$

(e cioè il determinante è diverso da zero).
Dimostrazione.
2.1 Sia W_σ la giacitura di σ. Dire che r è parallela a σ è equivalente a dire che il sottospazio W_r è contenuto in W_σ; questo vuol dire che il vettore generatore di W_r, (l, m, n), soddisfa l'equazione cartesiana di W_σ, che è $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$; quindi r è parallela a σ se e solo se $\alpha l + \beta m + \gamma n = 0$, che è quello che si doveva dimostrare.

Se r è data tramite equazioni cartesiane, $r = \pi \cap \pi'$, allora è ovvio che $W_r = W_\pi \cap W_{\pi'}$ e quindi $W_r \subset W_\sigma$ se e solo se $W_\sigma, W_\pi, W_{\pi'}$ appartangono ad uno stesso fascio di piani [5], il che accade (vedi osservazione 1) se e solo se $rg\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2.$
La dimostrazione di **2.1** è completa.
La dimostrazione di **2.2** segue subito dall'Osservazione 1 (per la condizione $r \subset \sigma$) e dal teorema di Rouché-Capelli (per la condizione $r \cap \sigma = \emptyset$).
La dimostrazione di **2.3** è ovvia dalla teoria dei sistemi lineari.

Proposizione 3. *Sono date due rette* r *e* ρ *di equazione rispettivamente*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \end{cases}.$$

r *e* ρ *sono complanari se e soltanto se la matrice*

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero. Se r *e* ρ *sono complanari allora*

$$r = \rho, \qquad r \cap \rho = P, \qquad r // \rho$$

[5] il fascio di piani per W_r

a seconda che si abbia rispettivamente

$$(4) \qquad rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2\,,$$

$$(5) \qquad rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 3\,,$$

$$(6) \qquad rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 3 \quad rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2$$

Dimostrazione.
Siano r e ρ come nell'enunciato; le due rette sono complanari se e solo esiste un piano che le contiene. Abbiamo visto nell'Osservazione 1 che la totalità dei piani per r è il fascio di piani

$$\ell(ax+by+cz+d)+\ell'(a'x+b'y+c'z+d')=0 \ \ ,(\ell,\ell')\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

Denotiamo con $\pi_{(\ell,\ell')}$ il piano del fascio corrispondente alla scelta (ℓ,ℓ'). Analogamente, la totalità dei piani per r' è data da

$$\lambda(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)+\lambda'(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta')=0 \ \ ,(\lambda,\lambda')\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

Denotiamo con $\pi_{(\lambda,\lambda')}$ il piano del fascio corrispondente alla scelta (λ,λ').
Quindi r ed r' sono complanari se e solo se $\exists\, \ell,\ell',\lambda,\lambda'$ tali che

$$\pi_{(\ell,\ell')}=\pi_{(\lambda,\lambda')}\,.$$

Ma $\pi_{(\ell,\ell')}$ ha equazione

$$(\ell a+\ell' a')x+(\ell b+\ell' b')y+(\ell c+\ell' c')z+(\ell d+\ell' d')=0\,;$$

analogamente $\pi_{(\lambda,\lambda')}$ ha equazione

$$(\lambda\alpha+\lambda'\alpha')x+(\lambda\beta+\lambda'\beta')y+(\lambda\gamma+\lambda'\gamma')z+(\lambda\delta+\lambda'\delta')=0\,.$$

Questi due piani coincidono se e solo se esiste $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tale che

$$\begin{cases} (\ell a+\ell' a')=t(\lambda\alpha+\lambda'\alpha') \\ (\ell b+\ell' b')=t(\lambda\beta+\lambda'\beta') \\ (\ell c+\ell' c')=t(\lambda\gamma+\lambda'\gamma') \\ (\ell d+\ell' d')=t(\lambda\delta+\lambda'\delta') \end{cases}$$

Ma allora le due rette sono complanari se e solo se i quattro vettori

$$(a,b,c,d)\,,\ (a',b',c',d')\,,\ (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,,\ (\alpha',\beta',\gamma',\delta')$$

sono linearmente dipendenti. La prima parte della Proposizione è allora dimostrata.

La varie eventualità che si presentano per due rette complanari (parallele, coincidenti o incidenti) sono ora facile conseguenza del teorema di Rouché-Capelli.