Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Appunti sulla geometria dello spazio affine

Vi invito a rileggere attentamente le due sezioni sui sottospazi affini di uno spazio vettoriale e loro equazioni (parametriche e cartesiane) [1]. Qui vi ricorderò soltanto che un sottospazio affine L di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme della forma

$$L = \underline{v}_0 + W = \{\underline{v}_0 + \underline{w} \,|\, \underline{w} \in W\}$$

con $\underline{v}_0 \in V$ e W un sottospazio di V. W è detto *sottospazio di giacitura* di L o anche, semplicemente, *sottospazio associato a* L. Si dice anche che L è *parallelo* a W e che L è stato ottenuto traslando tramite $\underline{v}_0$ il sottospazio W. Si pone $\dim L := \dim W$. Infine, diremo che due sottospazi affini L_1 e L_2 di giacitura W_1 e W_2 rispettivamente sono *paralleli* se $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$. In particolare, se L_1 e L_2 hanno la stessa dimensione allora L_1 e L_2 sono paralleli se $W_1 = W_2$. Se $\dim L_1 < \dim L_2$ allora L_1 e L_2 sono paralleli se $W_1 \subset W_2$.

Fissiamo un punto O nello spazio affine $\mathcal{A}^3$ ed una base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ per la spazio vettoriale $\mathcal{V}^3_O \equiv \mathcal{V}_O$. Esiste allora una corrispondenza biunivoca di insiemi:

$$\mathcal{A}^3 \leftrightarrow \mathcal{V}_O$$

che associa al **punto** $P \in \mathcal{A}^3$ il **vettore** $\underline{OP} \in \mathcal{V}_O$. In particolare il punto O è trasformato nel vettore nullo di $\mathcal{V}_O$.
Questa corrispondenza biunivoca trasforma i punti dello spazio, nei vettori di $\mathcal{V}_O$; le rette dello spazio, nei sottospazi affini di dimensione 1 di $\mathcal{V}_O$; i piani dello spazio, nei sottospazi affini di dimensione 2 di $\mathcal{V}_O$. Inoltre trasforma le rette (rispettiv. i piani) passanti per il punto O, nei sottospazi di dimensione 1 (rispettiv. 2) di $\mathcal{V}_O$.
Riassumendo: studiare le proprietà geometriche di punti, rette e piani in $\mathcal{A}^3$ è equivalente a studiare le proprietà geometriche dei sottospazi affini di $\mathcal{V}_O$.

Fissiamo ora una base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ per lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$. Rimangono allora determinate le coordinate di ogni vettore di $\mathcal{V}_O$ rispetto a questa base. Le coordinate fissano un isomorfismo di spazi vettoriali $\mathcal{V}_O \leftrightarrow \mathbb{R}^3$ che associa a $\underline{v} \in \mathcal{V}_O$ le coordinate (x, y, z) di $\underline{v}$ rispetto alla fissata base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$. Questo isomorfismo trasforma sottospazi affini di $\mathcal{V}_O$ in sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$. Mettendo insieme le due corrispondenze biunivoche

$$\mathcal{A}^3 \leftrightarrow \mathcal{V}_O \leftrightarrow \mathbb{R}^3$$

vediamo che esiste una corrispondenza biunivoca $\mathcal{A}^3 \leftrightarrow \mathbb{R}^3$ che associa ad ogni punto P le coordinate di $\underline{OP}$ rispetto a $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ e *che trasforma punti, rette e piani di $\mathcal{A}^3$ in sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ di dimensione rispettivamente 0,1,2.*
Inoltre le rette (rispet. i piani) di $\mathcal{A}^3$ passanti per il punto O sono trasformati in sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 (rispet. 2).

Le coordinate dipendono dalla scelta di O e dalla scelta della base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$. Si dice allora che è stato fissato un riferimento affine $RA(O, \underline{i}, \underline{j}\, \underline{k})$ con coordinate (x, y, z). Si usa anche la notazione $RA(O, x, y, z)$.

Scopriamo quindi che un piano π dello spazio è individuato da un vettore $\underline{OQ}$ e da un sottospazio vettoriale di dimensione 2 in $\mathcal{V}_O$ e quindi, in coordinate, da una terna $(x_Q, y_Q, z_Q) \in \mathbb{R}^3$ e da due vettori linearmente indipendenti $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \mathbb{R}^3$. Il

[1] Abate §6.4 e 6.5; vi invito anche a rividere il teorema di Rouché-Capelli (p.115) e il teorema generale sui sistemi lineari (Teorema 6.3 p. 125)

sottospazio vettoriale 2-dimensionale $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ è quindi la *giacitura* del piano π; i due vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ sono, per definizione, due *vettori di giacitura* per π.

È bene tenere a mente la descrizione dei punti di π data dalla definizione stessa di sottospazio affine: i punti P di π sono descrtti in coordinate da

$$\{(x_Q, y_Q, z_Q) + \underline{w}, \quad \underline{w} \in W = \mathrm{Span}(\underline{w}_, \underline{w}_2)\} \tag{1}$$

che riscriveremo brevemente come

$$\{Q + \underline{w}, \quad \underline{w} \in W = \mathrm{Span}(\underline{w}_, \underline{w}_2)\}\,.$$

In particolare, se sono assegnati tre punti *non allineati* P_0, P_1, P_2 di π, allora possiamo scegliere, ad esempio, $Q = P_0$ e

$$\underline{w}_1 = P_1 - P_0\,, \qquad \underline{w}_2 = P_2 - P_0.$$

Infatti, dalla (1) segue che

$$P_1 - P_0 \in W\,, \quad P_2 - P_0 \in W\,;$$

inoltre dato che i punti sono non allineati si ha subito che i due vettori $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ sono non-proporzionali e sono quindi una base per W.

Siano $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $\underline{w}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\underline{w}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ una base di W, sottospazio 2-dimensionale di $\mathbb{R}^3$, e sia π il piano da essi individuato. Allora π ha equazioni parametriche

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2) \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Per quel che concerne le equazioni cartesiane, sappiamo dalla teoria che π è ottenuto come insieme delle soluzioni di un sistema lineare (in generale non-omogeneo) di k equazioni in 3 incognite con rango della matrice dei coefficienti uguale a k e con $k = 3 - \dim W = 3 - 2 = 1$. In altre parole, π è ottenuto come insieme delle soluzioni di *una* equazione lineare

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad \text{con} \quad \mathrm{rg}\left|\begin{array}{ccc} A & B & C \end{array}\right| = 1\,.$$

Per ottenere *esplicitamente* l'equazione cartesiana di π a partire da P_0 e $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ osserviamo nuovamente che dalla (1) si ha:

$$(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)\,;$$

Si può ora procedere in due modi, il primo dei quali vi dovrebbe essere ben noto:

(1) imponiamo che il sistema in (α, β)

$$\alpha \underline{w}_1 + \beta \underline{w}_2 = \left|\begin{array}{c} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{array}\right|$$

abbia soluzioni e quindi scriviamo

$$\left|\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & x - x_0 \\ b_1 & b_2 & y - y_0 \\ c_1 & c_2 & z - z_0 \end{array}\right|$$

riduciamo con Gauss e imponiamo la compatibilità.

(2) imponiamo che la matrice 3×3 con righe uguali a $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) abbia rango 2. Ciò è equivalente a richiedere che

$$\det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando secondo la prima riga otteniamo un'equazione del tipo

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ [2] e quindi un'equazione del tipo

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{con} \quad (A, B, C) \neq (0, 0, 0)\,.$$

I numeri reali A, B, C sono detti *parametri di giacitura.*
In conclusione: dati P_0 e $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$, siamo in grado di scrivere l'equazione cartesiana del piano per P_0 parallelo a W.

Supponiamo viceversa che π sia dato tramite un'equazione cartesiana

$$Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

Allora sappiamo che π è il piano passante per una soluzione particolare Q dell'equazione data e con giacitura

$$W = \{\underline{w} \in \mathbb{R}^3 \mid Aw^1 + Bw^2 + Cw^3 = 0\}.$$

Il punto Q e i due vettori di giacitura si ottengono applicando il teorema di struttura all'equazione $Ax + By + Cz + D = 0$ che definisce il piano.
Notiamo infine che l'equazione di un piano è individuata a meno di un fattore di proporzionalità non-nullo; detto altrimenti, le due equazioni

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad \text{e} \quad \lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + \lambda D = 0, \ \ \lambda \neq 0$$

rappresentano lo stesso piano.

Una retta r è data assegnando un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ed un *vettore direzione* $\underline{w} = (l, m, n) \neq \underline{0}$. Il sottospazio vettoriale $W = \mathrm{Span}(\underline{w}) := \mathbb{R}\underline{w} \subset \mathbb{R}^3$ è detto la *direzione* di r. Le coordinate di $\underline{w}$ sono, per definizione, i *parametri direttori* di r. Ovviamente sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Le equazioni parametriche di tale retta sono date da

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere le equazioni cartesiane ragioniamo come nel caso del piano: *a priori*, per la discussione generale fatta sui sottospazi affini, sappiamo che r sarà espressa come insieme delle soluzioni di un sistema (in generale non-omogeneo) di k equazioni

[2] infatti

$$a = \det \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad b = -\det \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad c = \det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

e per il teorema degli orlati sappiamo che almeno uno di questi numeri è diverso da zero, essendo

$$\mathrm{rg} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$$

in 3 incognite di rango k, con $k = 3 - \dim W = 3 - 1 = 2$. Quindi r avrà equazioni cartesiane del tipo:

$$\begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \text{rg} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

Per determinare *esplicitamente* queste equazioni ragioniamo come nel caso del piano:

$$(x, y, z) \in r \Leftrightarrow (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \text{Span}(\underline{w})$$

Le equazioni cartesiane sono quindi date imponendo che sia

$$rg \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1\ .$$

Possiamo ora procedere in due modi

(1) riduciamo con Gauss

$$\left|\begin{array}{c|c} l & x - x_0 \\ m & y - y_0 \\ n & z - z_0 \end{array}\right|$$

e applichiamo la compatibilità.

(2) applichiamo il teorema degli orlati: orlando un minore 1×1 non nullo nella seconda riga (certamente esistente dato che $\underline{w} \neq \underline{0}$) la condizione

$$rg \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1$$

si traduce in un sistema di due equazioni non omogenee: ad esempio se $l \neq 0$ allora otteniamo

$$\det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0\,, \quad \det \begin{vmatrix} x - x_0 & z - z_0 \\ l & n \end{vmatrix} = 0\,,$$

che è del tipo

$$\begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad r \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

come deve essere [3].

Viceversa, sappiamo dalla teoria generale che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ costitutito dai punti le cui coordinate soddisfano un sistema del tipo

$$\begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad r \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

è un sottospazio affine di dimensione 1 (una retta), e più precisamente la retta ottenuta traslando tramite una soluzione particolare del sistema dato il sottospazio 1-dimensionale

$$W = \{\underline{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} Aw^1 + Bw^2 + Cw^3 = 0 \\ A'w^1 + B'w^2 + C'w^3 = 0 \end{cases} \}.$$

(Utilizzare come al solito il teorema di struttura.)

Studiamo ora la *mutua posizione di rette e piani.*

[3] per capire perché $r \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$ notiamo che $(A, B, C) = (m, -l, 0)$ e $(A', B', C') = (n, 0, -l)$ e questi due vettori sono non-proporzionali dato che $l \neq 0$

Proposizione 1. *Due piani π, π' di equazione cartesiana*

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \qquad A'x + By' + C'z + D' = 0$$

sono paralleli se e soltanto se i coefficienti di giacitura sono proporzionali e cioè se e solo se

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 1.$$

Il rango è invece uguale a due se e solo se $\pi \cap \pi' = r$, con r una retta. Se π e π' sono paralleli allora $\pi = \pi'$ oppure $\pi \cap \pi' = \emptyset$ a seconda che sia rispettivamente

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 1\,, \qquad rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 2\,.$$

Dimostrazione. I due piani sono paralleli se sono associati allo stesso sottospazio 2-dimensionale W. Quindi W deve avere equazione $Ax + Bx + Cx = 0$ perché associato a π e deve avere equazione $A'x + By' + C'z = 0$ perché associato a π' [4]. Ma l'equazione di W, sottospazio di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$, è individuata a meno di un fattore di proporzionalità non-nullo; quindi $(A, B, C) = \lambda(A', B', C')$, $\lambda \neq 0$ che si riscrive anche come

$$\text{rg} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 1.$$

Viceversa, se questa condizione è soddisfatta allora π ha equazione $A'x + By' + C'z + D/\lambda = 0$; è allora chiaro che π e π' hanno la stessa giacitura e sono quindi paralleli. Abbiamo dimostrato che $\text{rg} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 1$ se e solo se π e π' sono paralleli.

Dal teorema di Rouché-Capelli otteniamo subito che i due piani non hanno punti a comune se e solo se, in aggiunta, $rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 2$ mentre è ovvio che essi sono lo stesso piano se e solo se $rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 1\,.$

Infine, abbiamo già osservato che la teoria dei sistemi lineari ci dice che il sistema

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + By' + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

ammette come insieme delle soluzioni un sottospazio affine di dimensione 1, cioè una retta, se e solo se $\text{rg} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$. La Proposizione è dimostrata.

Osservazione 1. Sia r la retta di equazioni cartesiane:

$$(2) \qquad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + By' + C'z + D' = 0 \end{cases}, \quad \text{con} \quad \text{rg} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2\,.$$

r è quindi espressa come intersezione di due piani π e π'.
È ovvio che i punti della retta r soddisfano l'equazione

$$(3) \qquad \lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(A'x + By' + C'z + D') = 0\,, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

[4]vi ricordo che la giacitura W di un sottospazio affine L dato tramite equazioni cartesiane $A\underline{x} = \underline{b}$ si ottiene considerando il sistema omogeneo associato $A\underline{x} = \underline{0}$

Quest'equazione rappresenta quindi un piano contenente r. Viceversa, sia σ un piano contenente r e di equazione $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$. Allora tutti i punti di r soddisfano il sistema

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + By' + C'z + D' = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \end{cases}$$

Ma allora, necessariamente,

$$\mathrm{rg} \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 2$$

(il rango non può essere 1 per la (2) e non può essere 3 perché altrimenti esisterebbe un'unica soluzione) e ne segue che esistono $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ tali che

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \lambda(A, B, C, D) + \mu(A', B', C', D') .$$

La conclusione di questo ragionamento è che *la totalità dei piani per r è data da (3) al variare di $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*. La totalità dei piani per r costituisce il *fascio di piani per r*.

Proposizione 2.
2.1 *Sia $r = \pi \cap \pi'$ una retta e sia σ il piano di equazione cartesiana*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

Sia $W_r = \mathbb{R}(l, m, n)$ la direzione di r. Allora r è parallela a σ se e soltanto se

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0 .$$

Equivalentemente, se e solo se

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2$$

e cioè se e soltanto se il determinante di questa matrice 3×3 *è* $= 0$.
2.2 *Se r e σ sono paralleli allora $r \subset \sigma$ o $r \cap \sigma = \emptyset$ a seconda che sia rispettivamente*

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 2 \qquad rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 3.$$

2.3 *Si ha invece che $r \cap \sigma = P$ se e soltanto se*

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$$

(e cioè il determinante è diverso da zero).

Dimostrazione.
2.1 Sia W_σ la giacitura di σ. Dire che r è parallela a σ è equivalente a dire che il sottospazio W_r è contenuto in W_σ; questo vuol dire che il vettore generatore di W_r, (l, m, n), soddisfa l'equazione cartesiana di W_σ, che è $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$; quindi r è parallela a σ se e solo se $\alpha l + \beta m + \gamma n = 0$, che è quello che si doveva dimostrare.

Se r è data tramite equazioni cartesiane, $r = \pi \cap \pi'$, allora è ovvio che $W_r = W_\pi \cap W_{\pi'}$ e quindi $W_r \subset W_\sigma$ se e solo se $W_\sigma, W_\pi, W_{\pi'}$ appartangono ad uno stesso fascio

di piani [5], il che accade (vedi osservazione 1) se e solo se $rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2.$
La dimostrazione di **2.1** è completa.
La dimostrazione di **2.2** segue subito dall'Osservazione 1 (per la condizione $r \subset \sigma$) e dal teorema di Rouché-Capelli (per la condizione $r \cap \sigma = \emptyset$).
La dimostrazione di **2.3** è ovvia dalla teoria dei sistemi lineari.

Proposizione 3. *Sono date due rette r e ρ di equazione rispettivamente*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \end{cases} .$$

r e ρ sono complanari se e soltanto se la matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero. Se r e ρ sono complanari allora

$$r = \rho, \qquad r \cap \rho = P, \qquad r // \rho$$

a seconda che si abbia rispettivamente

$$rg \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2 \,,$$

$$rg \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 3 \,,$$

$$rg \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 3 \quad rg \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2$$

Dimostrazione.
Siano r e ρ come nell'enunciato; le due rette sono complanari se e solo esiste un piano che le contiene. Abbiamo visto nell'Osservazione 1 che la totalità dei piani per r è il fascio di piani

$$\ell(ax + by + cz + d) + \ell'(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \ \ , (\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Denotiamo con $\pi_{(\ell,\ell')}$ il piano del fascio corrispondente alla scelta (ℓ, ℓ'). Analogamente, la totalità dei piani per r' è data da

$$\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) + \lambda'(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta') = 0 \ \ , (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Denotiamo con $\pi_{(\lambda,\lambda')}$ il piano del fascio corrispondente alla scelta (λ, λ').
Quindi r ed r' sono complanari se e solo se $\exists\, \ell, \ell', \lambda, \lambda'$ tali che

$$\pi_{(\ell,\ell')} = \pi_{(\lambda,\lambda')} \,.$$

[5]il fascio di piani per W_r

Ma $\pi_{(\ell,\ell')}$ ha equazione

$$(\ell a + \ell' a')x + (\ell b + \ell' b')y + (\ell c + \ell' c')z + (\ell d + \ell' d') = 0\,;$$

analogamente $\pi_{(\lambda,\lambda')}$ ha equazione

$$(\lambda\alpha + \lambda'\alpha')x + (\lambda\beta + \lambda'\beta')y + (\lambda\gamma + \lambda'\gamma')z + (\lambda\delta + \lambda'\delta') = 0\,.$$

Questi due piani coincidono se e solo se esiste $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$\begin{cases} (\ell a + \ell' a') = t(\lambda\alpha + \lambda'\alpha') \\ (\ell b + \ell' b') = t(\lambda\beta + \lambda'\beta') \\ (\ell c + \ell' c') = t(\lambda\gamma + \lambda'\gamma') \\ (\ell d + \ell' d') = t(\lambda\delta + \lambda'\delta') \end{cases}$$

Ma allora le due rette sono complanari se e solo se i quattro vettori

$$(a, b, c, d)\,,\ (a', b', c', d')\,,\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta)\,,\ (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$$

sono linearmente dipendenti. La prima parte della Proposizione è allora dimostrata.

La varie eventualità che si presentano per due rette complanari (parallele, coincidenti o incidenti) sono ora facile conseguenza del teorema di Rouché-Capelli.