Geometria 1. I^0 Modulo. a.a. 00/01. Gruppo E-N
Complementi per la lezione del 21/12/00

Questi complementi sono facoltativi. Vogliamo introdurre una notazione che semplifichi la trattazione di quei problemi che coinvolgono cambiamenti di coordinate etc...
Cominciamo con una proposizione molto generale dalla quale poi tutto discende. Fissiamo innanzitutto la notazione.

V è uno spazio vettoriale di dimensione n.
$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_2\}$ è una base di V.
Dato che il nostro scopo è quello di introdurre una notazione compatta sarà bene utilizzare un simbolo compatto per questa base. Potremmo decidere per $\underline{v}$, ma poi c'è il pericolo di confondersi con il generico vettore $\underline{v}$ di V. Propendiamo per $\mathbb{V}$. Quindi $\mathbb{V} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$.

U è un secondo spazio vettoriale di dimensione k con base $\mathbb{U} = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k\}$.

W è un terzo spazio vettoriale di dimensione m con una base $\mathbb{W} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$.

Supponiamo di avere due applicazioni lineari $F : V \to U$ e $G : U \to W$. Rimane definita l'applicazione composta $G \circ F : V \to W$. È facile vedere che l'applicazione composta è ancora lineare: ad es. $(G \circ F)(\underline{v} + \underline{v}') = G(F(\underline{v} + \underline{v}')) = G(F\underline{v} + F\underline{v}') = G(F\underline{v}) + G(F\underline{v}') = (G \circ F)(\underline{v}) + (G \circ F)(\underline{v}')$.

L'applicazione $F : V \to U$ ha una matrice associata, con base di partenza $\mathbb{V}$ e base di arrivo $\mathbb{U}$. Vi ricordo che questa è la matrice $k \times n$ che *ha come j-ma colonna le coordinate di $F(\underline{v}_j)$ nella base* $\mathbb{U}$. Invece di denotare questa matrice semplicemente con A la denotiamo con $M_{\mathbb{U},\mathbb{V}}(F)$. *Notare la posizione scambiata delle due basi.*
Analogamente $G : U \to W$ ha una matrice associata $M_{\mathbb{W},\mathbb{U}}(G)$; questa è la matrice $m \times k$ che ha come j-ma colonna le coordinate di $G(u_j)$ nella base $\mathbb{W}$.
Ovviamente possiamo anche considerare l'applicazione lineare $G \circ F : V \to W$ e la sua matrice rispetto alle basi $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$. Questa è una matrice $m \times n$ e la denotiamo ovviamente con $M_{\mathbb{W},\mathbb{V}}(G \circ F)$.
Proposizione. Si ha

$$M_{\mathbb{W},\mathbb{V}}(G \circ F) = M_{\mathbb{W},\mathbb{U}}(G) \cdot M_{\mathbb{U},\mathbb{V}}(F)$$

dove a destra c'è il prodotto righe per colonne delle due matrici.
Quindi le due basi al centro "si elidono".
La dimostrazione della proposizione coinvolge argomentazioni del tutto simili a quelle date nella Sezione 4 del Capitolo 5.

Corollario. Se T ed S sono due endomorfismi di V, $T : V \to V$, $S : V \to V$, e $\mathbb{V}$ è una base di V allora

$$M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(S \circ T) = M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(S) \cdot M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(T)$$

A parole: *una volta fissata una base di V, la matrice associata alla composizione è il prodotto righe per colonne delle matrici associate alle singole applicazioni.*

Torniamo ora al nostro problema che era il seguente:

supponiamo di avere un'applicazione lineare $T : V \to W$; supponiamo di fissare una base $\mathbb{V}$ in V e una base $\mathbb{W}$ in W. Abbiamo una matrice che abbiamo denotato con A. Supponiamo di fissare due basi diverse, $\mathbb{V}'$ in V e $\mathbb{W}'$ in W. Abbiamo una matrice che abbiamo denotato con B. Abbiamo poi introdotto la matrice M che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{v}'_j$ nella base $\mathbb{V}$. Infine, abbiamo considerato la matrice N che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{w}'_j$ nella base $\mathbb{W}$. Abbiamo poi *dimostrato* che

$$B = N^{-1}AM$$

Ci poniamo la seguente domanda: *come si ricava questo risultato dalla Proposizione sopra enunciata ?* La risposta non è difficile.
Innanzitutto, con la nostra nuova notazione la matrice A si scrive $M_{\mathbb{W},\mathbb{V}}(T)$, quindi

$$A = M_{\mathbb{W},\mathbb{V}}(T) \tag{1}$$

Per la matrice B si ha analogamente

$$B = M_{\mathbb{W}',\mathbb{V}'}(T) \tag{2}$$

Sia Id_V l'applicazione identità in V. Questa è l'applicazione che manda $\underline{v}$ in se stesso (cioè lo lascia fermo): $\mathrm{Id}_V(\underline{v}) = \underline{v}\ \forall \underline{v} \in V$. Analogamente, sia Id_W l'applicazione identità in W. È chiaro che se componiamo l'identità Id_V con T riotteniamo T; in formule $T \circ \mathrm{Id}_V = T$. Possiamo anche scrivere $\mathrm{Id}_W \circ T \circ \mathrm{Id}_V = T$ (l'ordine è giusto, fatevi uno schemino). In particolare

$$M_{\mathbb{W}',\mathbb{V}'}(T) \equiv M_{\mathbb{W}',\mathbb{V}'}(\mathrm{Id}_W \circ T \circ \mathrm{Id}_V) \tag{3}$$

Per non appesantire troppo la notazione scriviamo semplicemente

$$M_{\mathbb{W}',\mathbb{V}'}(T) \equiv M_{\mathbb{W}',\mathbb{V}'}(\mathrm{Id} \circ T \circ \mathrm{Id})\,. \tag{4}$$

Per la Proposizione si ha

$$M_{\mathbb{W}',\mathbb{V}'}(\mathrm{Id} \circ T \circ \mathrm{Id}) = M_{\mathbb{W}',\mathbb{W}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathbb{W},\mathbb{V}}(T) \cdot M_{\mathbb{V},\mathbb{V}'}(\mathrm{Id}) \tag{5}$$

Utilizzando la (4) otteniamo infine la **formula magica**

$$M_{\mathbb{W}',\mathbb{V}'}(T) = M_{\mathbb{W}',\mathbb{W}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathbb{W},\mathbb{V}}(T) \cdot M_{\mathbb{V},\mathbb{V}'}(\mathrm{Id}) \tag{6}$$

Scopriremo fra poco che questa è la formula dimostrata a lezione. È quasi ovvio che $M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(\mathrm{Id}) = I_n$ dove a destra c'è la matrice identità. [1] Consideriamo ora la matrice $M_{\mathbb{V},\mathbb{V}'}(\mathrm{Id})$: questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\mathrm{Id}(\underline{v}'_j)$ nella base $\mathbb{V}$; dato che $\mathrm{Id}(\underline{v}'_j) = \underline{v}'_j$ scopriamo che $M_{\mathbb{V},\mathbb{V}'}(\mathrm{Id})$ *è la matrice la cui j-ma colonna è uguale alle coordinate di $\underline{v}'_j$ nella base* $\mathbb{V}$; ma questa è per definizione M. Quindi

$$M = M_{\mathbb{V},\mathbb{V}'}(\mathrm{Id}). \tag{7}$$

Analogamente

$$M_{\mathbb{W},\mathbb{W}'}(\mathrm{Id}) = N$$

Si noti che sempre per la proposizione

$$M_{\mathbb{W},\mathbb{W}'}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathbb{W}',\mathbb{W}}(\mathrm{Id}) = M_{\mathbb{W},\mathbb{W}}(\mathrm{Id})$$

---

[1] Infatti la matrice $M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(\mathrm{Id})$ ha come j-ma colonna le coordinate di $\mathrm{Id}(\underline{v}_j)$ rispetto alla base $\mathbb{V} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, cioè le coordinate di $\underline{v}_j$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$; ma

$$\underline{v}_j = 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + \dots + 0\underline{v}_{j-i} + 1\underline{v}_j + 0\underline{v}_{j+1} + \dots + 0\underline{v}_n$$

da cui segue l'asserto.

e dato che a destra c'è la matrice identità scopriamo che

$$M_{\mathbb{W}',\mathbb{W}}(\mathrm{Id}) = (M_{\mathbb{W},\mathbb{W}'}(\mathrm{Id}))^{-1} \tag{8}$$

quindi, in definitiva

$$M_{\mathbb{W}',\mathbb{W}}(\mathrm{Id}) = N^{-1} \tag{9}$$

Mettendo tutto insieme otteniamo due risultati: il primo, conseguenza di (6) e (8) è una riscrittura della formula magica

$$M_{\mathbb{W}',\mathbb{V}'}(T) = (M_{\mathbb{W},\mathbb{W}'}(\mathrm{Id}))^{-1} \cdot M_{\mathbb{W},\mathbb{V}}(T) \cdot M_{\mathbb{V},\mathbb{V}'}(\mathrm{Id})\,;$$

il secondo, che segue da (7) e (9) e da (1) e (2) ci dice che la formula magica **è** la formula vista a lezione. Il vantaggio di riguardare la formula dimostrata a lezione come la formula magica è che quest'ultima fa apparire in maniera molto precisa le basi coinvolte. Già negli esercizi, ma anche in generale, da un punto di vista teorico, questa precisione è estremamente utile. Vediamolo nell'esercizio dato nel compito pomeridiano:

Esercizio. *Sia $V = \mathbb{R}^2$. Verificare che i seguenti 2 vettori sono una base di $\mathbb{R}^2$:*

$$\underline{v}_1 = (1,2)\,, \quad \underline{v}_2 = (-1,1).$$

Verificare che i seguenti 2 vettori sono un'altra base di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{u}_1 = (1,1)\,, \quad \underline{u}_2 = (1,0)$$

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'operatore lineare definito da

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2\,, \quad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2.$$

2.1 *Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:*
base partenza $= \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$
base arrivo $= \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$
2.2 *Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:*
base partenza $= \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$
base arrivo $= \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$
2.3 *Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:*
base partenza $= \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$
base arrivo $= \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$
2.4 *Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:*
base partenza $= \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$
base arrivo $= \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

SOLUZIONE. La prima parte dell'esercizio è standard. Passiamo a 2.1 → 2.4. Adottiamo la notazione $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ per le due basi. L'esercizio ci fornisce le coordinate di $T(\underline{v}_1)$ e $T(\underline{v}_2)$ nella base $\mathbb{U}$. Quindi abbiamo $M_{\mathbb{U},\mathbb{V}}(T)$, che è la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ora, dalla formula magica e sue varianti otteniamo subito le altre matrici 3 matrici. 2.2 ci chiede di scrivere $M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(T)$. Per la formula magica questa matrice è uguale a

$$M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) \cdot M_{\mathbb{U},\mathbb{V}}(T)$$

dove non abbiamo scritto la terza matrice $M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ perché è uguale all'identità. Ora, $M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ è la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{u}_1$ nella base $\mathbb{V}$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{u}_2$ in $\mathbb{V}$. Impostando il sistemino $(1,1) = \alpha(1,2) + \beta(-1,1)$ e risolvendo scopriamo che

$$(1,1) = \frac{2}{3}(1,2) + (-\frac{1}{3})(-1,1)$$

Analogamente

$$(1,0) = \frac{1}{3}(1,2) + (-\frac{2}{3})(-1,1)$$

e quindi

$$M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

Calcolando il prodotto otteniamo $M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(T)$. Notare come la notazione introdotta ci suggerisca in maniera naturale la soluzione dell'esercizio !
2.3 ci chiede $M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(T)$; per la formula magica questa è uguale a

$$M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathbb{U},\mathbb{V}}(T) \cdot M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(\mathrm{Id})$$

e in questo prodotto conosciamo le 3 matrici.
2.4 ci chiede $M_{\mathbb{U},\mathbb{U}}(T)$. Per la formula magica questa matrice è uguale a

$$M_{\mathbb{U},\mathbb{V}}(T) \cdot M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(\mathrm{Id})\ ;$$

queste due matrici le conosciamo e calcolando il prodotto abbiamo finito.