ALGEBRA I: QUINTA ESERCITAZIONE
4 maggio 2011

Esercizio 1. Calcolare, se possibile, la divisione col resto tra le seguenti coppie di elementi nei rispettivi anelli:

(i) $f(x) = x^3 - 4x + 2, \ \ g(x) = 2x + 1$ in $\mathbb{R}[x]$;

(ii) $f(x) = x^3 - 4x + 2, \ \ g(x) = 2x + 1$ in $\mathbb{Z}[x]$;

(iii) $f(x) = x^3 + x^2 - \bar{1}, \ \ g(x) = \bar{2}x + \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_4[x]$;

(iv) $f(x) = x^3 + x^2 - \bar{1}, \ \ g(x) = \bar{2}x + \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_5[x]$.

Esercizio 2. Quale dei seguenti polinomi sono irriducibili?

(i) $f(x) = 3x^7 - 5x^4 + 12x - 1$ in $\mathbb{R}[x]$;

(ii) $f(x) = x^2 - 3x + 3$ in $\mathbb{R}[x]$;

(iii) $f(x) = 6x^7 - 5x^2 + 4x - 3$ in $\mathbb{C}[x]$;

(iv) $f(x) = 3x + 21$ in $\mathbb{Z}[x]$.

Esercizio 3. Calcolare in $\mathbb{Q}[x]$ il massimo comun divisore $d(x)$ dei polinomi $f(x) = x^5+2x^4+3x^3+3x^2+x+2$ e $g(x) = x^4+3x^2+4$; determinare $h(x)$ e $k(x)$ tali che risulti $f(x)h(x)+g(x)k(x) = d(x)$.

Esercizio 4. Sia $m(x)$ il massimo comun divisore dei polinomi $f(x)$ e $g(x)$ in $\mathbb{R}[x]$ e siano $I = \{f(x)h(x) \mid h(x) \in \mathbb{R}[x]\}$ e $J = \{g(x)k(x) \mid k(x) \in \mathbb{R}[x]\}$. Dimostrare che

$$I + J = \{m(x)h(x) \mid h(x) \in \mathbb{R}[x]\}\,,$$

dove $I + J \overset{\text{def}}{=} \{i + j \mid i \in I,\, j \in J\}$.

Esercizio 5. Sia X un insieme e A un anello. Denotiamo con $F(X, A)$ l'insieme delle funzioni da X in A.

(i) Determinare che $F(X, A)$ è un anello rispetto alle operazioni definite da

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad\qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

dove $f, g \in F(X, A)$, $x \in X$.

(ii) Dato $x \in X$ dimostrare che l'applicazione $ev_x : F(X, A) \to A$ definita da $ev_x(f) = f(x)$ è un omomorfismo di anelli. ev_x è suriettiva?