ALGEBRA I: SECONDA ESERCITAZIONE
31 marzo 2011

Esercizio 1. Determinare, motivando la risposta, la cardinalità dell'insieme X nei seguenti casi:

i. $X = \{0,1\}^{\mathbb{Q}}$; *ii.* $X = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a - b \in \mathbb{Z}\}$;

iii. $X = \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$; *iv.* $X = \{f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4\} \mid f \text{ suriettiva}\}$.

Si ricordi che dati due insiemi A e B, si denota con A^B l'insieme di tutte le applicazioni da B in A; quindi, in particolare, nel punto *(i)* si ha $\{0,1\}^{\mathbb{Q}} := \{f : \mathbb{Q} \to \{0,1\}\}$.
(Suggerimento: per il punto *(ii)* può essere utile il seguente teorema, enunciato in classe, [Campanella, Cor. 2, p. 48]: *Per ogni $n \geq 1$, si ha $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$.*)

Esercizio 2. Se S è un insieme con 3 elementi, quante sono tutte le possibili relazioni definibili su S? Quante di esse sono di equivalenza?

Esercizio 3. Sia $f : A \to B$ un omomorfismo di anelli unitari.

i. Verificare che se f è unitario (cioè tale che $f(1_A) = 1_B$) risulta $f(\mathcal{U}(A)) \subseteq \mathcal{U}(B)$, dove $\mathcal{U}(A)$ e $\mathcal{U}(B)$ denotano rispettivamente i gruppi degli elementi invertibili di A e B.

ii. Se $\mathcal{F}$ è un campo, dimostrare che $\mathcal{U}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \setminus \{0\}$.

iii. L'inclusione del punto *(i)* può essere stretta?

iv. Se f non è unitario l'inclusione del punto *(i)* è sempre vera?
(Suggerimento: c'è un applicazione molto naturale che non è unitaria...)

Esercizio 4.

i. Calcolare il massimo comun divisore d tra i numeri -1921 e 170.

ii. Determinare due interi r e s tali che $-1921r + 170s = d$ (*identità di Bézout*).

Esercizio 5. Si consideri il seguente "falso" teorema, di cui viene data una "falsa" dimostrazione.

Teorema. Data una relazione binaria ρ su un insieme X, se ρ verifica le proprietà simmetrica e transitiva, allora ρ verifica anche la proprietà riflessiva.

Dimostrazione. Sia $x \in X$. Si prenda $y \in X$ tale che $x \,\rho\, y$. Per la proprietà simmetrica, essendo $x \,\rho\, y$, si ha $y \,\rho\, x$. Ma allora per la proprietà transitiva, da $x \,\rho\, y$ e $y \,\rho\, x$, segue $x \,\rho\, x$. Quindi $x \,\rho\, x$ per ogni $x \in X$; cioè la relazione ρ è riflessiva. $\square$

i. Trovare l'errore logico nella dimostrazione;

ii. dare un esempio di relazione che soddisfa le proprietà simmetrica e transitiva ma non riflessiva.

Esercizio 6. Dimostrare che se A e B sono due insiemi, risulta

$$(A \cup B) \cap C = B \ \Leftrightarrow [B \subset C \text{ e } A \cap C \subset B].$$