ALGEBRA I: PRIMA ESERCITAZIONE
24 marzo 2011

Esercizio 1. Assegnate le applicazioni $f : A \to B$, $g : B \to C$ è definita la loro composizione $g \circ f : A \to C$. Dimostrare o confutare con un controesempio le seguenti affermazioni:

i. se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva;

ii. se $g \circ f$ è iniettiva allora g è iniettiva;

iii. se $g \circ f$ è suriettiva allora f è suriettiva;

iv. se $g \circ f$ è suriettiva allora g è suriettiva;

v. se $g \circ f$ è iniettiva e f è suriettiva, allora g è iniettiva;

vi. se $g \circ f$ è suriettiva e g è iniettiva, allora f è suriettiva.

Esercizio 2. Sia ρ una relazione di equivalenza su un insieme A e sia σ una relazione di equivalenza su un insieme B. Definiamo su $A \times B$ la seguente relazione $\mathcal{R}$:

$$(a, b)\, \mathcal{R}\, (a_1, b_1) \quad \Leftrightarrow \quad a\, \rho\, a_1 \text{ e } b\, \sigma\, b_1.$$

i. Verificare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza su $A \times B$;

ii. verificare che l'insieme quoziente $A \times B/_{\mathcal{R}}$ è in corrispondenza biunivoca con $A/_{\rho_f} \times B/_{\sigma}$.

Esercizio 3. Fissato $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si consideri la seguente funzione

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & a & \longmapsto & r \end{array}$$

dove r è il resto della divisione di a per n. Si chiede di:

i. scrivere esplicitamente in $\mathbb{Z}$ la relazione di equivalenza ρ_f associata ad f (tale relazione prende il nome di *congruenza modulo* n e le classi di equivalenza rispetto a tale relazione sono dette *classi resto modulo* n);

ii. costruire l'insieme quoziente $A/_{\rho}$ nel caso $n = 5$.

Esercizio 4. Verificare quali delle seguenti relazioni ρ (in cui A è l'insieme su cui sono definite e x e y sono elementi di A) sono riflessive, quali simmetriche e quali di equivalenza. Per le relazioni di equivalenza capire come è fatto l'insieme $A/_{\rho}$ delle classi di equivalenza e scrivere un'applicazione $f : A \to B$ (per un opportuno insieme B) tale che, per ogni x e y di A, $x\, \rho\, y$ se e solo se $f(x) = f(y)$.

i. $A = \{x \mid x \text{ è un essere umano}\}$, $x\, \rho\, y$ se e solo se x e y sono nati nello stesso anno;

ii. A è l'usuale piano della geometria euclidea, $x\, \rho\, y$ se e solo se $\overline{xy} < 1$ (dove $\overline{xy}$ è la distanza tra x e y);

iii. A è l'usuale piano della geometria euclidea dotato di un sistema di assi cartesiani di origine il punto O; $x\, \rho\, y$ se e solo se $\overline{Ox} = \overline{Oy}$;

iv. $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x\, \rho\, y$ se e solo se $\mathrm{MCD}(x, y) = 1$.

Esercizio 5. Sia $A \subset \mathbb{Z}$ un sottoinsieme dei numeri interi. Definiamo la relazione di divisibilità su A nel seguente modo: dati a, $b \in A$, diciamo che a *divide* b, e scriviamo $a|b$, se b è un multiplo di a, ovvero esiste un intero c tale che $b = ac$.
Mostrare che la relazione di divisibilità su $\mathbb{Z}$ non è una relazione d'ordine.

Esercizio 6. Sia $h > -1$. Si dimostri per induzione la disuguaglianza di Bernoulli, cioè che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$