ALGEBRA I: SETTIMA ESERCITAZIONE
19 maggio 2011

Esercizio 1. Siano R e T due anelli e $R \times T$ il loro prodotto diretto. Stabilire quali delle seguenti applicazioni sono omomorfismi di anelli e, in caso affermativo, trovare il nucleo, l'immagine e applicare il teorema di omomorfismo:

$\phi_1 : R \to R \times T$ definita ponendo $\phi_1(r) = (r, 0)$;

$\phi_2 : R \times T \to R$ definita ponendo $\phi_2(r, t) = r$;

$\phi_2 : R \times R \to R$ definita ponendo $\phi_3(r_1, r_2) = r_1 + r_2$.

Esercizio 2. Provare che $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - 10) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, dove $\mathbb{Z}[\sqrt{10}] = \left\{a + b\sqrt{10} \, : \, a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.
(Suggerimento: mostrare che l'applicazione

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{Z}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n & \mapsto & p(\sqrt{10}) = a_0 + a_1\sqrt{10} + \ldots + a_n(\sqrt{10})^n \end{array}$$

è un omorfismo di anelli, trovare il nucleo e l'immagine di ϕ ed applicare il teorema di omomorfismo...)

Esercizio 3. Dimostrare che esistono infiniti ideali massimali di $\mathbb{Z}[x]$ contenenti $3\mathbb{Z}[x]$.
(Suggerimento:

i. mostrare che gli ideali massimali di $\mathbb{Z}[x]$ contenenti $3\mathbb{Z}[x]$ sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali massimali di $\mathbb{Z}_3[x]$;

ii. osservare che in un dominio principale gli ideali massimali sono quelli generati da un elemento irriducibile;

iii. dimostrare che in $\mathbb{Z}_3[x]$ ci sono infiniti elementi irriducibili.)

Esercizio 4. Fattorizzare i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[i]$ nel prodotto di fattori irriducibili:

$$4 + i, \quad 5 - 3i, \quad -13, \quad 7 + 2i.$$

Esercizio 5. Dimostrare che in $\mathbb{Z}[i]$ ogni elemento irriducibile divide uno e un solo p (dove p è un primo di $\mathbb{Z}$).