ALGEBRA I: QUARTA ESERCITAZIONE
13 aprile 2011

Esercizio 1. Sia n un intero, $\phi(n)$ il valore della sua funzione di Eulero.
Dimostrare che $\phi(n) = \frac{n}{3}$ se e solo se $n = 2^h 3^k$, $h, k \geq 1$.

Esercizio 2. Dimostrare che ogni numero primo $p \neq 2, 3, 5$ divide $\underbrace{11..1}_{p-1}$.

(*Suggerimento: applicare il piccolo teorema di Fermat con un opportuno* $a \in \mathbb{N}$, *tale che* $(a, p) = 1$ *per ogni primo* $p \neq 2, 3, 5$)

Esercizio 3. Trovare tutte le soluzioni intere del sistema

$$\begin{cases} X \equiv 1472^{3453} \mod 20 \\ X \equiv 219^{45} \mod 23. \end{cases}$$

Esercizio 4. Osserviamo che, per ogni $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}_m \setminus \{\bar{0}\} = \mathcal{U}(\mathbb{Z}_m) \cup \{\text{divisori dello zero di } \mathbb{Z}_m\}$.
Mostrare con almeno due esempi che, se $(A, +, \cdot)$ è un anello, l'inclusione

$$A \setminus \{0\} \supset \mathcal{U}(A) \cup \{\text{divisori dello zero di } A\}\,.$$

può essere stretta.

Esercizio 5. Si consideri l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (a, b) & \longmapsto & 8a + 6b. \end{array}$$

i. Dire se g è iniettiva e/o suriettiva.

ii. Determinare $Im(g)$.

ii. Determinare $g^{-1}(5)$ e $g^{-1}(6)$ e le rispettive cardinalità.

Esercizio 6. Verificare che l'insieme delle funzioni reali di variabile reale ha cardinalità superiore a quella del continuo.