Terzo foglio esercizi tutor

Matteo Bruno

Dicembre 2023

Esercizio 1

Dimostrare che il determinante della matrice di Vandermonde quadrata di ordine $n+1$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}, \text{ è dato da } \det M = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Usare questo risultato per risolvere l'esercizio 9.6 del [A-dF-es]. Ossia, calcolare

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ 1 & 2\lambda^2 & 4\lambda^2 & \cdots & 2^n\lambda^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n\lambda^n & n^2\lambda^n & \cdots & n^n\lambda^n \end{pmatrix}.$$

Esecizio 2

Siano S un sottoinsieme e π un piano in $\mathbb{R}^5$ caratterizzati come segue:

$$S \text{ è il sottospazio definito dal sistema di equazioni: } \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\pi \text{ è il piano generato dai vettori } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Indicheremo con $\mathbb{R}^3_S$ il sottospazio vettoriale relativo a S e con $\mathbb{R}^2_\pi$ quello relativo a π.

- Verificare che $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^3_S \oplus \mathbb{R}^2_\pi$

Definiamo ora una proiezione lineare $P : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ su $\mathbb{R}^3_S$ "parallelamente" a $\mathbb{R}^2_\pi$ nella maniera seguente:
Ogni vettore $v \in \mathbb{R}^5$ si scrive in maniera univoca come $v = u + w$, dove $u \in \mathbb{R}^2_\pi$ e $w \in \mathbb{R}^3_S$ (ciò a causa delle proprietà di somma diretta). La proiezione di v è definita dalla sua componente lungo $\mathbb{R}^3_S$, ossia $P(v) = P(u + w) = w$.

- Dare la matrice associata a P rispetto la base canonica $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^5$.

Soluzione 1

Possiamo usare la dimostrazione per induzione, La base induttiva è facilmente fornita dalla matrice di ordine 2:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 - x_0.$$

Per il calcolo del determinante della matrice di Vandermonde M di ordine $n+1$ possiamo usare le proprietà di multilinearità del determinante rispetto le colonne. Sottraiamo ad ogni colonna la precedente moltiplicata per x_0. ottenendo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{pmatrix}$$

Possiamo ora applicare la formula di Laplace lungo la prima riga.

$$\det M = \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{pmatrix}$$

Sfruttiamo ora la multilinearità del determinante rispetto le righe notando che la k-esima riga presenta un fattore $(x_k - x_0)$:

$$\det M = (x_1 - x_0) \dots (x_n - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

L'espressione del determinante è quella del determinante della matrice di Vandermonde di ordine n. Posso dunque usare l'ipotesi induttiva e ottenere che

$$\det M = \prod_{1 \le k \le n} (x_k - x_0) \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Ci sono differenti modi per dimostrare questa proprietà che vi invito ad andare a vedere Wikipedia - Vandermonde determinant.

L'esercizio presentato si svolge ora agevolmente. Riduciamo la matrice utilizzando lo sviluppo di Laplace lungo la prima riga:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda\\ 1 & 2\lambda^2 & 4\lambda^2 & \cdots & 2^n\lambda^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & n\lambda^n & n^2\lambda^n & \cdots & n^n\lambda^n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & \cdots & \lambda\\ 2\lambda^2 & 4\lambda^2 & \cdots & 2^n\lambda^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n\lambda^n & n^2\lambda^n & \cdots & n^n\lambda^n\end{pmatrix}$$

Sfruttiamo la multilinearità per le righe riconoscendo un fattore $k\lambda^k$ alla k-esima riga.

$$\det\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & \cdots & \lambda\\ 2\lambda^2 & 4\lambda^2 & \cdots & 2^n\lambda^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n\lambda^n & n^2\lambda^n & \cdots & n^n\lambda^n\end{pmatrix} = \lambda^{1+2+\cdots+n} n! \det\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & n & \cdots & n^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Possiamo ora riconoscere in questa matrice una matrice di Vandermonde di ordine n i cui elementi sono $x_j = j+1$. Usando l'espressione trovata per il determinante di una matrice di Vandermonde, il determinante risulta essere

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & n & \cdots & n^{n-1}\end{pmatrix} &= \prod_{0\le i<j\le n-1}\big(j+1-(i+1)\big)\\ &= \prod_{0<j\le n-1}\prod_{0\le i<j}(j-i) = \prod_{0<j\le n-1} j! = 1!\cdot 2!\ldots(n-1)!\end{aligned}$$

Mettendo questa espressione nel risultato immediatamete precedente otteniamo:

$$\det\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & \cdots & \lambda\\ 2\lambda^2 & 4\lambda^2 & \cdots & 2^n\lambda^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n\lambda^n & n^2\lambda^n & \cdots & n^n\lambda^n\end{pmatrix} = \big(1!\cdot 2!\ldots(n-1)!\cdot n!\big)\lambda^{1+2+\cdots+n}$$

Soluzione 2

Per dimostrare che i due spazi vettoriali sono in somma diretta bisogna verificare che la loro somma dà tutto lo spazio e che hanno intersezione banale.

Inziamo dimostrando che $\mathbb{R}^3_S + \mathbb{R}^2_\pi = \mathbb{R}^5$. Per fare ciò dimostriamo che affiancando una base per $\mathbb{R}^3_S$ e una per $\mathbb{R}^2_\pi$, si ottiene una base per $\mathbb{R}^5$.
La base di $\mathbb{R}^2_\pi$ è già nota ed è costituita da due vettori $\{v_1 := (1\ 2\ 1\ 0\ 0), v_2 :=$

(0 0 0 1 0)}. La base di $\mathbb{R}^3_S$ si trova risolvendo il sistema, è facile verificare che

$$\mathbb{R}^3_S = Span\{v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Bisogna ora verificare che $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ costutuisca una base per $\mathbb{R}^5$. Per verficare che siano linearmente indipendenti calcoliamo il determinante della matrice che ha come colonne questi 5 vettori.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Per fare il calcolo si è usato due volte lo sviluppo di Laplace lungo l'ultima riga e infine la regola di Sarrus. Il determinante è non nullo, dunque sono 5 vettori linearmente indipendenti; in uno spazio di dimensione 5 sono automaticamente una base. Perciò $\mathbb{R}^3_S + \mathbb{R}^2_\pi = \mathbb{R}^5$.

Verifichiamo ora che $\mathbb{R}^3_S \cap \mathbb{R}^2_\pi = \{0\}$. Per fare ciò, mettiamo a sistema le equazioni cartesiane di $\mathbb{R}^3_S$ e $\mathbb{R}^2_\pi$ e verifichiamo che abbia come unica soluzione il vettore nullo. Dobbiamo innanzitutto trovare le equazioni cartesiane per $\mathbb{R}^2_\pi$. Riduciamo dunque in scala la seguente matrice

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} \rightarrow \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} \rightarrow \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - 2x_3 \\ x_5 \end{matrix}$$

Otteniamo così il sistema di equazioni per il piano π:

$$\mathbb{R}^2_\pi = \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Il sistema di equazioni da risolvere per trovare l'intersezione è dunque il seguente:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{a cui è associata la matrice} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché il determinante della matrice associata al sistema lineare è non nullo (in particolare vale 2) allora il sistema ammette una e una sola soluzione. Essendo un sistema omogeneo, l'unica soluzione è data dal vettore nullo.

Per risolvere il secondo punto è utile notare che esiste una base in cui la matrice associata a P assume una forma molto semplice. Infatti, dato un qualunque vettore $w \in \mathbb{R}^3_S$, $P(w) = w$. In termini di autovettori, $\mathbb{R}^3_S$ costituisce l'autospazio dell'autovalore 1. Mentre, un qualunque vettore $u \in \mathbb{R}^2_\pi$ viene mandato in zero, $P(u) = 0$. $\mathbb{R}^2_\pi$ costituisce il nucleo di P e, in particolare, l'autospazio di autovalore 0. Dunque, se scegliamo una base composta da due vettori in $\mathbb{R}^2_\pi$ e tre in $\mathbb{R}^3_S$, la matrice associata a P in questa base risulta diagonalizzata. Una tale base è fornita, per costruzione, dalla base $\mathcal{B}$ precedentemente definita. L'espressione di P in questa base è

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bisognerà allora trovare la matrice del cambiamento di coordinate dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{E}$. La j-esima colonna di questa matrice è formata dalle coordinate del j-esimo vettore della base $\mathcal{B}$ rispetto la base $\mathcal{E}$, ottenendo:

$$C := M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La cui inversa è

$$C^{-1} = M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare la matrice associata a P nella base $\mathcal{E}$ usiamo la nota formula

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P) = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{id})M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(P)M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = CM_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(P)C^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$