A.A. 2015-2016. CORSO DI ALGEBRA 1.
PROFF. P. PIAZZA, E. SPINELLI.
SOLUZIONE ESERCIZI PER CASA DEL FOGLIO 1.

Esercizio 1. 5. Sia $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Siano (r, ϑ) le coordinate polari su $\mathbb{C}$. Consideriamo la seguente funzione a valori reali su D^2:

$$f_p : D^2 \to [-1, 1], \qquad f_p(z) = f_p(r \cdot e^{i\vartheta}) = r \cdot \sin(p\,\vartheta)$$

(A) Sia ρ_p la relazione su D^2 così definita:

$$z_1 \rho_p z_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad z_2 = e^{i\,2\pi\,\frac{k}{p}} \cdot z_1 \;\text{ per qualche }\; 0 \leq k < p$$

Mostrare che ρ_p è una relazione di equivalenza.

(B) Sia ρ_{f_p} la relazione su D^2 definita da

$$z_1 \rho_{f_p} z_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad f_p(z_1) = f_p(z_2)$$

Far vedere che ρ_p è strettamente contenuta in ρ_{f_p}.

(C) Determinare D^2/ρ_p ed una funzione $F_p : D^2/\rho_p \to [-1, 1]$ tale che $f_p = F_p \circ \pi_{\rho_p}$, dove $\pi_{\rho_p} : D^2 \to D^2/\rho_p$ è la proiezione al quoziente. Notare che una tale F_p esiste in virtù del punto (B) e del *Teorema fondamentale delle applicazioni.*

Soluzione. Per il punto (A) verifichiamo le tre proprietà: riflessiva, simmetrica, transitiva.

Riflessività. Sia $z = r \cdot e^{i\vartheta} \in D^2$. Allora è chiaro che $z = e^{2\pi \cdot \frac{0}{p}} z = 1 \cdot z$ ovvero $z \rho_p z$, $\forall z \in D^2$.

Simmetria. Siano $z_1 = r_1 \cdot e^{\vartheta_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{\vartheta_2}$ e supponiamo che $z_1 \rho_p z_2$. Questo è vero se e solo se, esiste un $0 \leq k < p$ tale che:

$$r_2 \cdot e^{i\vartheta_2} = e^{i\,2\pi\,\frac{k}{p}} \cdot r_1 \cdot e^{i\vartheta_1} = r_2 \cdot e^{i(\vartheta_1 + 2\pi\,\frac{k}{p})}$$

Osserviamo che questo implica che $r_1 = r_2$ (basta confrontare i moduli dei due numeri complessi z_1 e z_2). Possiamo assumere quindi che $k \neq 0$. Se fosse infatti $k = 0$, dovendo essere $r_1 = r_2$ deve risultare $\vartheta_2 = \vartheta_1 + 2k\,\pi$ dove $k \in \mathbb{Z}$, e dunque $z_2 = z_1$, ed al passo precedente abbiamo mostrato che ρ_p è riflessiva. Se $k \neq 0$ allora $0 \leq p - k < p$. Facciamo vedere quindi che $z_1 = e^{i\,2\pi\,\frac{p-k}{p}} z_2$:

$$e^{i\,2\pi\,\frac{p-k}{p}} z_2 = e^{i\,2\pi\,\frac{p-k}{p}} \cdot e^{i\,2\pi\,\frac{k}{p}} \cdot z_1 = e^{i2\pi} \cdot z_1 = z_1$$

Questo dimostra la simmetria.

Transitività. Supponiamo che $z_1 \rho_p z_2$ e che $z_2 \rho_p z_3$. Allora $z_3 = e^{i2\pi\,\frac{k}{p}} z_2$ e $z_2 = e^{i\,2\pi\,\frac{l}{p}} z_1$ con $0 \leq k, l < p$. Ne segue che $z_3 = e^{i\,2\pi\,\frac{k+l}{p}} z_1$. Ora si osservi che $0 \leq k + l < 2p$: abbiamo due casi $k + l < p$ oppure $k + l \geq p$. Nel primo caso l'equazione che collega z_3 a z_1 implica direttamente $z_1 \rho_p z_3$. Nel secondo si osservi che $k + l = p + ((k + l) - p)$ dove $0 \leq (k + l) - p < p$, quindi:

$$z_3 = e^{i2\pi\,\frac{k+l}{p}} z_1 = e^{i2\pi} \cdot e^{i2\pi\,\frac{(k+l)-p}{p}} z_1 = e^{i2\pi\,\frac{(k+l)-p}{p}} z_1$$

Questo completa la dimostrazione della transitività.

Dimostriamo il punto (B). A questo scopo osserviamo che ci è sufficiente far vedere che:
(1) f_p è costante sulle classi di equivalenza;
(2) dato un elemento $z \in D^2$ esiste uno $z' \in D^2$, $z' \notin [z]_{\rho_p}$ tale che $f_p(z') = f_p(z)$.
Dalla definizione segue che la classe di equivalenza di un punto $z \in D^2$ è data da $\{0\}$ se $z = 0$, $\{e^{i2\pi \frac{k}{p}} z\}_{k=0}^{p-1}$ se $z \neq 0$. Per definizione di f_p vediamo che, se $z = r\, e^{i\vartheta}$:

$$f_p\left(z\, e^{i2\pi \frac{k}{p}}\right) = f_p\left(r\, e^{i(\vartheta + 2\pi \frac{k}{p})}\right) = r \cdot \sin\left(p\left(\vartheta + 2\pi \frac{k}{p}\right)\right) = r \cdot \sin(p \cdot \vartheta)$$

Questo dimostra che f_p è costante sulle classi di equivalenza di ρ_p, ovvero (1). Per mostrare (2) ci basta osservare che $0 = f_p(0) = f_p(r) = f(r\, e^{i\,0})$ mentre $[\,r\,]_{\rho_p}$ sono tutte distinte al variare di $r \in [0, 1]$.

Per mostrare (C) procediamo nel modo seguente: mostreremo che ogni classe di equivalenza ammette uno ed un solo rappresentante appartenente all'insieme $S_{\frac{2\pi}{p}} \left\{z = r\, e^{i\vartheta} \mid r \in [0, 1],\, \vartheta \in [0, \frac{2\pi}{p})\right\}$. Osservato questo fatto se ne deduce che la mappa g che invia ogni classe di equivalenza $[z]_{\rho_p}$ nel suo rappresentante in $S_{\frac{2\pi}{p}}$, ovvero la mappa $g : [z]_{\rho_p} \to S_{\frac{2\pi}{p}} \cap \{z \cdot e^{i2\pi \frac{k}{p}}\}_{k=0}^{p-1} = S_{\frac{2\pi}{p}} \cap [z]_{\rho_p}$, fornisce una biezione tra l'insieme quoziente D^2/ρ_p e l'insieme $S_{\frac{2\pi}{p}}$; la funzione F_p sarà quindi la composizione $f_p \circ g : D^2/\rho_p \to [-1, 1]$ dell'applicazione g con la restrizione di f_p al settore $S_{\frac{2\pi}{p}}$.

Scegliamo quindi $z \in D^2$. Mostriamo che la sua classe di equivalenza contiene uno ed un solo elemento in $S_{\frac{2\pi}{p}}$. Sappiamo che $z = r \cdot e^{i\vartheta}$, quindi l'affermazione è banale per $\vartheta \in [0, \frac{2\pi}{p})$. Supponiamo quindi che $\vartheta \in [\frac{2\pi}{p}, 2\pi)$. In tal caso, essendo le classi di equivalenza date da $\{e^{i\vartheta + i2\pi \frac{k}{p}}\}_{k=0}^{p-1}$ ed essendo $\vartheta \geq \frac{2\pi}{p}$ esiste $k_0 \in \{1, ..., p-2\}$ tale che $\vartheta + 2\pi \frac{k_0}{p} < 2\pi$ e $\vartheta + 2\pi \frac{k_0+1}{p} \geq 2\pi$ (verificate!). Osserviamo quindi che $\vartheta + 2\pi \frac{k_0+1}{p} - 2\pi < \frac{2\pi}{p}$: se così non fosse ne seguirebbe che $\vartheta + 2\pi \frac{k_0}{p} \geq 2\pi$, che va contro la definizione data di k_0. $\square$

Esercizio 1. 6. Un sottoinsieme $C \subset \mathbb{R}^2$ è convesso se dati due punti $p_1, p_2 \in C$ il segmento che ha per estremi tali punti, $\{(1-t)p_1 + tp_2 \mid t \in [0, 1]\}$, è anch'esso contenuto in C. Consideriamo la collezione $\mathcal{C}_0$ dei sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^2$ contenenti il punto $\underline{0} = (0, 0)$.

(A) Verificare che l'intersezione di due insiemi convessi è convessa.

(B) Consideriamo la seguente relazione su $\mathcal{C}_0$:

$$C_1 \leq C_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad C_2 \subseteq C_1$$

Mostrare che si tratta di una relazione d'ordine. E' una relazione di ordine totale?

(C) Sia $\overline{B}(\underline{0}, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq R\}$. Esibire un maggiorante della catena

$$\overline{B}(\underline{0}, 1) \leq \overline{B}(\underline{0}, \frac{1}{2}) \leq \cdots \leq \overline{B}(\underline{0}, \frac{1}{2^k}) \leq \cdots$$

Soluzione. Dimostriamo (A). Siano C_1 e C_2 due sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^2$ la cui intersezione è non vuota. Se $C_1 \cap C_2 = \{p\}$, $p \in \mathbb{R}^2$ non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti siano $p_1, p_2 \in C_1 \cap C_2$. Poiché sono in C_1, che è convesso, il segmento che li unisce è interamente contenuto in C_1. D'altra parte, essendo p_1 e p_2 in C_2 tale segmento deve essere contenuto anche in C_2. Ne segue che il segmento $\{tp_1 + (1-t)p_2 \mid t \in [0, 1]\} \subseteq C_1 \cap C_2$. Dunque $C_1 \cap C_2$ è convesso.

Per mostrare (B) dobbiamo far vedere che la relazione $\leq$ è riflessiva, antisimmetrica, transitiva. Tali proprietà sono di facile verifica. Mostreremo a titolo di esempio come provare la transitività: supponiamo che $C_1 \leq C_2$ e che $C_2 \leq C_3$; per definizione questo significa che $C_2 \subseteq C_1$ e che $C_3 \subseteq C_2$, pertanto $C_3 \subseteq C_1$, ovvero $C_1 \leq C_3$.

Per vedere che non si tratta di una relazione d'ordine totale è sufficiente esibire una coppia di convessi (contenenti lo $\underline{0}$) C_1, C_2 tali che $C_1^c \cap C_2 \neq \varnothing$, $C_2^c \cap C_1 \neq \varnothing$. La coppia $C_1 = \overline{B}((1,0),2)$ (cerchio di raggio 2 centrato in $(1,0)$) e $C_2 = \overline{B}((-1,0),2)$ (cerchio di raggio 2 centrato in $(-1,0)$) ha le proprietà richieste.

Per quanto riguarda (C), osserviamo che il punto $\underline{0}$ è contenuto in ciascuno degli insiemi della catena $(\{\overline{B}(\underline{0}, \frac{1}{2^k})\}, \leq)$. In particolare questo significa che $\overline{B}(\underline{0}, \frac{1}{2^k}) \leq \{\underline{0}\}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$, ovvero $\{\underline{0}\}$ è un maggiorante della suddetta catena. $\square$

Esercizio 1. 7. Sia $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}^2}$ l'insieme dei convessi di $\mathbb{R}^2$ la cui intersezione con il sottoinsieme $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ è non vuota ed ha cardinalità 1. Considerare la seguente relazione su $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}^2}$:

$$C_1 \,\rho\, C_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad C_1 \cap \mathbb{Z}^2 = C_2 \cap \mathbb{Z}^2$$

Verificare che è una relazione di equivalenza. Determinare l'insieme quoziente $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}^2}/\rho$ attraverso la scelta di opportuni rappresentanti nelle classi di equivalenza.

Soluzione. La verifica della riflessività, della simmetria e della transitività sono pressoché tautologiche (verificate!). Mi limiterò quindi a determinare l'insieme $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}^2}/\rho$. Consideriamo quindi un convesso $C \in \mathcal{C}_{\mathbb{Z}^2}$. Per definizione esso interseca $\mathbb{Z}^2$ in un unico punto $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ e gli elementi appartenenti alla sua classe di equivalenza (per definizione di ρ) hanno la stessa intersezione con $\mathbb{Z}^2$. Quindi $[C]_\rho = \{C' \in \mathcal{C}_{\mathbb{Z}^2} \mid (m,n) \in C'\}$. Notare che nella situazione descritta $\{(m,n)\} \in [C]_\rho$ e che per definizione elementi distinti di $\mathbb{Z}^2$ appartengono a distinte classi di equivalenza modulo ρ. In altre parole l'insieme $\mathbb{Z}^2$ fornisce un insieme di rappresentanti per l'insieme delle classi di equivalenza $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}^2}/\rho$. La biezione tra questi due insiemi è data dalla seguente applicazione:

$$f : \mathcal{C}_{\mathbb{Z}^2}/\rho \to \mathbb{Z}^2, \qquad f([C]_\rho) = C \cap \mathbb{Z}^2$$