ALGEBRA I: SECONDA ESERCITAZIONE
31 marzo 2011
Soluzione degli esercizi non corretti in aula

Esercizio 1.*iv.* Determinare, motivando la risposta, la cardinalità dell'insieme

$$X = \{f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4\} \mid f \text{ suriettiva}\}.$$

Svolgimento. Per ogni $f \in X$, essendo f suriettiva, c'è uno ed un solo elemento del codominio $\{1,2,3,4\}$ che è immagine (tramite f) di due elementi distinti del dominio $\{1,2,3,4,5\}$.
Da queste considerazioni otteniamo:

$$|X| = \sum_{i=1}^{4} \left| \left\{ f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4\} \mid f \text{ suriettiva e } |f^{-1}(i)| = 2 \right\} \right|. \qquad (a)$$

Per simmetria, posto $X_i := \left\{ f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4\} \mid f \text{ suriettiva e } |f^{-1}(i)| = 2 \right\}$, abbiamo che

$$|X_i| = |X_j| \qquad \text{per ogni } i,\, j \in \{1,2,3,4\}. \qquad (b)$$

Da (a) e (b) segue che

$$|X| = 4 \cdot |X_1|. \qquad (c)$$

In definitiva è sufficiente calcolare la cardinalità dell'insieme X_1.
Per determinare univocamente $f \in X_1$ basta scegliere in $\{1,2,3,4,5\}$ tre elementi da associare rispettivamente a 2, 3 e 4.
Quindi gli elementi di X_1 sono tanti quante sono le terne ordinate in $\{1,2,3,4,5\}$, cioè in un insieme di 5 elementi:

$$\begin{aligned} |X_1| &= \#\,\{\text{triple ordinate di elementi distinti di un insieme di 5 elementi}\} \qquad (d) \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60, \end{aligned}$$

essendo

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-k+1) = \#\,\{k\text{-uple ordinate di elementi distinti di un insieme di } n \text{ elementi}\}.$$

Da (c) e (d), otteniamo infine $|X| = 4 \cdot |X_1| = 4 \cdot 60 = 240$. □

Esercizio 5. Si consideri il seguente "falso" teorema, di cui viene data una "falsa" dimostrazione.

> **Teorema.** Data una relazione binaria ρ su un insieme X, se ρ verifica le proprietà simmetrica e transitiva, allora ρ verifica anche la proprietà riflessiva.
>
> *Dimostrazione.* Sia $x \in X$. Si prenda $y \in X$ tale che $x\,\rho\,y$. Per la proprietà simmetrica, essendo $x\,\rho\,y$, si ha $y\,\rho\,x$. Ma allora per la proprietà transitiva, da $x\,\rho\,y$ e $y\,\rho\,x$, segue $x\,\rho\,x$. Quindi $x\,\rho\,x$ per ogni $x \in X$; cioè la relazione ρ è riflessiva. □

i. Trovare l'errore logico nella dimostrazione;

ii. dare un esempio di relazione che soddisfa le proprietà simmetrica e transitiva ma non riflessiva.

Svolgimento. *i.* L'errore è nel passaggio "*Si prenda $y \in X$ tale che $x\,\rho\,y$*". Infatti si sta assumendo che per ogni $x \in X$ esista almeno un $y \in X$ tale che $x\rho y$, ma questo in generale è falso per una relazione ρ simmetrica e transitiva - come si vede considerando l'elemento c dell'esempio presentato nello svolgimento del punto *ii.*

ii. Sia $X = \{a,b,c\}$. La relazione ρ, definita su X e costituita dalle coppie (a,a), (a,b), (b,a) e (b,b) soddisfa le proprietà simmetrica e transitiva ma non quella riflessiva in quanto $c \not\rho\, c$.

(Osserviamo che un altro esempio di relazione simmetrica e transitiva ma non riflessiva è dato dalla relazione vuota, cioè il sottoinsieme vuoto di $X \times X$.) □

Esercizio 6. Dimostrare che se A, B e C sono tre insiemi, risulta

$$(A \cup B) \cap C \stackrel{(1)}{=} B \;\Leftrightarrow [B \stackrel{(2)}{\subset} C \text{ e } A \cap C \stackrel{(3)}{\subset} B].$$

Svolgimento. ((1) $\Rightarrow$ (2) e (3)). (1) implica che $B \subset (A \cup B) \cap C$, cioè che $B \subset (A \cup B)$ e $B \stackrel{(2)}{\subset} C$. (2) risulta pertanto dimostrata.
D'altronde (1) implica anche l'inclusione inversa, cioè $B \supset (A \cup B) \cap C$. Ma per la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione (vedi [Piacentini-Cattaneo, es. 1.1.4, p. 11, assegnato per casa]):

$$(A \cup B) \cap C \;=\; (A \cap C) \cup (B \cap C). \tag{e}$$

Dunque $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset B$, quindi in particolare si ha l'inclusione (3).
((1) $\Leftarrow$ (2) e (3)). Per provare (1) è sufficiente ottenere le due inclusioni

$$(A \cup B) \cap C \subset B, \tag{1.1}$$

$$(A \cup B) \cap C \supset B. \tag{1.2}$$

(1.1). Sia $d \in (A \cup B) \cap C$. Dalla formula (e) sappiamo che $d \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, perciò $d \in (A \cap C) \subset B$ (l'ultima inclusione segue dall'ipotesi (3)) oppure $d \in B \cap C \subset B$. Quindi $d \in B$ e questo prova (1.1).

(1.2). Osserviamo che (2) implica

$$B \cap C = B, \tag{f}$$

quindi, applicando nell'ordine (e) e (f), abbiamo

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ &= (A \cap C) \cup B \\ &\supset B. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato (1.2) e questo conclude la dimostrazione. $\square$