Secondo foglio esercizi tutor

Matteo Bruno

Dicembre 2023

Esercizio

Sia $\mathbb{R}_n[x]$ l'insieme dei polinomi di grado uguale o inferiore a n a coefficienti in $\mathbb{R}$. Un elemento di questo spazio $p \in \mathbb{R}_n[x]$ si scrive dunque come una somma formale

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

1. Verificare che un tale spazio ha una struttura di spazio vettoriale $/\mathbb{R}$. Indicarne la dimensione e una base.
2. Si definisca l'applicazione $\mathrm{D} : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ come

   $$\mathrm{D} : p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mapsto (\mathrm{D}\, p)(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

   Verificare che D è lineare. Dare dimensione e base di Ker(D) e Im(D). Trovare la matrice associata a D nella base data precedentemente.
3. Si consideri l'applicazione:

   $$\begin{aligned} \Phi :& \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1} \\ & p(x) \mapsto (p(0), (\mathrm{D}\, p)(0), (\mathrm{D}^2\, p)(0), \ldots, (\mathrm{D}^n\, p)(0)). \end{aligned}$$

   Verificare che Φ è lineare e trovare la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$. Dire se Φ è biettiva. Se lo è, fornirne l'inversa.

Soluzione

1. È facile verificare che si tratta di uno sp. vett. $/\mathbb{R}$. La somma di due elementi $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ e $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ è definita come

   $$(p + q)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k.$$

Il prodotto per uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ è dato da

$$(\alpha p)(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k) x^k.$$

La dimensione di $\mathbb{R}_n[x]$ è $n+1$. Una possibile base è data dalla base canonica $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

2. Si considerino $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$, tali che p, q come sopra.

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\alpha p + \beta q)(x) &= \sum_{k=1}^{n} k(\alpha a_k + \beta b_k) x^{k-1} \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} + \beta \sum_{k=1}^{n} k b_k x^{k-1} = \alpha(\mathrm{D}\, p)(x) + \beta(\mathrm{D}\, q)(x). \end{aligned}$$

Per calcolare la dimensione di $\mathrm{Ker}(\mathrm{D})$ e $\mathrm{Im}(\mathrm{D})$ troviamo prima la matrice associata a D nella base $\mathcal{E}$. Troviamo dunque le immagini dei vettori di base $(\mathrm{D}\,1)(x) = 0$, $(\mathrm{D}\,x)(x) = 1$, $(\mathrm{D}\,x^2)(x) = 2x, \dots,$ $(\mathrm{D}\,x^n)(x) = nx^{n-1}$. Le colonne di questa matrice sarannno le coordinate di questi vettori rispetto la base $\mathcal{E}$.

$$_{\mathcal{E}}M_{\mathcal{E}}(\mathrm{D}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Risulta quindi evidente che $\mathrm{Ker}(\mathrm{D}) = \mathit{Span}\{1\}$ e dunque ha dimensione uno. Per il teorema della dimensione $\dim \mathbb{R}_n[x] = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{D}) + \dim \mathrm{Im}(\mathrm{D})$, da cui otteniamo $\dim \mathrm{Im}(\mathrm{D}) = n$. E la base data da $\{x, x^2, \dots, x^n\}$.

Si noti che è possibile scegliere una base in cui l'espressione matriciale di D è ancora più semplice, ci riferiremo a questa base come base normalizzata $\mathcal{N} = \{1, x, \frac{1}{2!}x^2, \dots, \frac{1}{n!}x^n\}$. In una tale base. la matrice associata a D è della forma

$$_{\mathcal{N}}M_{\mathcal{N}}(\mathrm{D}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ciò si può ottenere con lo stesso procedimento di prima applicato alla nuova base $\mathcal{N}$. Equivalentemente si può calcolare usando la matrice di cambiamento di coordinate

$$
{}_{\mathcal{E}}C_{\mathcal{N}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n!} \end{pmatrix}
$$

Sapendo che ${}_{\mathcal{N}}M_{\mathcal{N}}(\mathrm{D}) = {}_{\mathcal{N}}C_{\mathcal{E}}^{-1}(\mathrm{id})_{\mathcal{E}}M_{\mathcal{E}}(\mathrm{D})_{\mathcal{E}}C_{\mathcal{N}}(\mathrm{id})$.

3. Bisogna innanzitutto verificare che l'applicazione $p(x) \mapsto p(0)$ sia lineare. Si considerino $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$, tali che p, q come sopra. Si ha che $(\alpha p + \beta q)(0) = \alpha a_0 + \beta b_0 = \alpha p(0) + \beta q(0)$, ed è dunque lineare.
   Poiché D è lineare, le sue potenze sono lineari. Dunque Φ è una composizione di applicazioni lineari ed è essa stessa lineare. La matrice associata a Φ rispetto alla basi canoniche in partenza $\mathcal{E}$ e in arrivo $\mathcal{E}'$ è

$$
{}_{\mathcal{E}'}M_{\mathcal{E}}(\mathrm{D}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2! & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n! \end{pmatrix}
$$

   Se volessimmo dare la matrice associata rispetto la base normalizzata in partenza otterremmo

$$
{}_{\mathcal{E}'}M_{\mathcal{N}}(\mathrm{D}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
$$

   L'applicazione Φ è chiaramente invertibile. L'applicazione inversa sarà

$$
\begin{aligned} \Phi^{-1} :& \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_n[x] \\ & (a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^{n} k!\, a_{k+1}\, x^k. \end{aligned}
$$