Secondo foglio esercizi grandi

Matteo Bruno

Gennaio 2024

Esercizio grande

Sia $M(n,\mathbb{C})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti complessi.

1. $M(n,\mathbb{C})$ è uno spazio vettoriale con le usuali nozioni di somma tra matrici e moltiplicazione per uno scalare.
   Si discuta della struttura di spazio vettoriale sul campo dei numeri reali.
   Si deduca la dimensione di $M(n,\mathbb{C})$ e si indichi una base.

   Si considera per tutto l'esercizio $M(n,\mathbb{C})$ come spazio vettoriale reale.

2. Si ricorda la definizione di coniugazione complessa in $\mathbb{C}$. Dato $z \in \mathbb{C}$ il suo complesso coniugato z^* è dato da $z^* = \Re(z) - i\Im(z)$, dove $\Re$ e $\Im$ indicano rispettivamente la parte reale e immaginaria e i l'unità immaginaria.
   Si definisce l'applicazione
   $$\begin{aligned} L :& M(n,\mathbb{C}) \to M(n,\mathbb{C}); \\ & A = \{a_{ij}\} \mapsto A^\dagger = \{a^*_{ji}\}. \end{aligned}$$
   Verificare che l'applicazione L è lineare (ci riferiremo a questa proprietà come $\mathbb{R}$-linearità). Fornire la matrice associata nella base indicata precedentemente.

3. Data l'applicazione
   $$\begin{aligned} f : & M(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}; \\ & A \mapsto \Re(tr(A)), \end{aligned}$$
   dove $tr(A)$ indica la traccia della matrice A. Dimostrare che si tratta di un funzionale lineare. Dimostrare che $f \circ L = f$, ossia che $\Re(tr(A^\dagger)) = \Re(tr(A))$.

4. Siano dati due sottoinsiemi $\mathcal{S}, \mathcal{A} \subset M(n,\mathbb{C})$, definiti come segue:
   $$\begin{aligned} \mathcal{S} &:= \{A \in M(n,\mathbb{C}) \,|\, A = A^\dagger\}, \\ \mathcal{A} &:= \{A \in M(n,\mathbb{C}) \,|\, A = -A^\dagger\}. \end{aligned}$$

Dimostrare che questi due sottoinsiemi sono sottospazi con la struttura di spazio vettoriale reale, indicarne la dimensione e fornire una base.
Dedurne che $M(n,\mathbb{C}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

5. Si consideri ora $M(n,\mathbb{C})$ munito della seguente forma bilineare

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : & M(n,\mathbb{C}) \times M(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{R} \\ & (A,B) \mapsto \Re(tr(AB^\dagger)) \end{aligned}$$

Verificare che si tratta di un prodotto scalare definito positivo.

6. Dimostrare che l'applicazione L è simmetrica in questo spazio vettoriale metrico. Trovare autovalori e relativi autospazi. Dedurne che L è anche una isometria.
Suggerimento: notare che $L^2 = \mathrm{id}$.

Soluzione

1. Si ricorda che la somma tra due matrici $A = \{a_{ij}\}$ e $B = \{b_{ij}\}$ è data dalla matrice i cui elementi sono ottenuti somma dei corrispetvi elementi di A e B: $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Mentre la moltiplicazione per uno scalare $\alpha \in \mathbb{K}$ (per indicare $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) è data dalla moltiplicazione dei singoli elementi: $(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$.
Risulta evidente che, dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A, B \in M(n,\mathbb{C})$, $\alpha A + \beta B$ sia ancora una matrice complessa di ordine n.
Chiameremo E_{kl} la matrice che ha tutti gli elementi nulli eccetto l'elemento della riga k-esima e colonna l-esima che vale 1. La collezione di tali matrici $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, \ldots, E_{nn}\}$ però non fornisce una base per $M(n,\mathbb{C})$ come sp. vett. reale. Una qualunque loro combinazione lineare a coefficienti reali infatti darà una matrice reale. Per completare questo insieme a una base per $M(n,\mathbb{C})$ dovremo considerare le matrici I_{kl}. La matrice I_{kl} ha tutti gli elementi nulli eccetto l'elemento della riga k-esima e colonna l-esima che vale i. In questo caso, la collezione $\mathcal{E} = \{E_{11}, I_{11}, E_{12}, I_{12}, \ldots, E_{n,n}, I_{nn}\}$ fornisce una base per $M(n,\mathbb{C})$ come sp. vett. reale. In tal caso, $\dim_{\mathbb{R}} M(n,\mathbb{C}) = 2n^2$.

2. L'applicazione L è $\mathbb{R}$-lineare. Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A, B \in M(n,\mathbb{C})$ si verifica che $(\alpha A + \beta B)^\dagger_{ij} = (\alpha a_{ji} + \beta b_{ji})^* = \alpha a^*_{ji} + \beta b^*_{ji}$ da cui $L(\alpha A + \beta B) = (\alpha A + \beta B)^\dagger = \alpha A^\dagger + \beta B^\dagger$ per cui la proprietà di linearità è soddisfatta.
Per completezza, possiamo notare che l'applicazione L non è $\mathbb{C}$-lineare. In analogia con la coniugazione complessa in $\mathbb{C}$.

   Ricordiamo che la matrice di una applicazione lineare in una base data si costruisce mettendo alla k-esima colonna il vettore delle coordinate dell'immagine del k-esimo elemento di base. Chiamiamo $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(L)$ la matrice associata all'applicazione L, in questo caso ci aspettiamo sia una

matrice reale quadrata di ordine $2n^2$. Andiamo dunque a valutare L sui vettori di base, notiamo che $E_{kl}^\dagger = E_{lk}$ e $I_{kl}^\dagger = -I_{lk}$.
Scegliamo dunque un ordine della base che ci permetta di scrivere più agevolmente la matrice:

$$\mathcal{E} = \{E_{11}, I_{11}, E_{12}, E_{22}, E_{21}, I_{12}, I_{22}, I_{21}, E_{13}E_{23}E_{33}, \dots\}$$

La prima colonna di L sarà dunque il vettore delle coordinate di $E_{11}^\dagger$ rispetto alla base data sopra, il quale è $(1\,0\dots0)$. La seconda colonna di L sarà, invece, il vettore delle coordinate di $I_{11}^\dagger$ rispetto la base $\mathcal{E}_\mathbb{R}$, il quale è $(0\,-1\,0\dots0)$. La terza colonna sarà il vettore delle coordinate di $E_{12}^\dagger$, ossia $(0\,0\,0\,0\,1\,0\dots0)$. Mentre la quarta $(0\,0\,0\,1\,0\dots0)$. E così via. Ottenendo infine una matrice composta da $2n$ blocchi

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(L) = \begin{pmatrix} \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{matrix} & & & & & \\ & \begin{matrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{matrix} & & & & \\ & & \begin{matrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{matrix} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \begin{matrix}0 & 0 & 1\\ 0 & \iddots & 0\\ 1 & 0 & 0\end{matrix} & \\ & & & & & \begin{matrix}0 & 0 & -1\\ 0 & \iddots & 0\\ -1 & 0 & 0\end{matrix} \end{pmatrix}$$

3. Dobbiamo verificare, prima di tutto, che f sia lineare. Dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$ abbiamo che $\Re(\alpha z) = \alpha\Re(z)$, dunque la $\Re$ è una applicazione $\mathbb{R}$-lineare su $\mathbb{C}$. La traccia sappiamo essere lineare, perciò f è $\mathbb{R}$-lineare in quanto composizione di applicazioni $\mathbb{R}$-lineari.
   Per dimostrare $\Re(tr(A^\dagger)) = \Re(tr(A))$, consideriamo $A = \{a_{ij}\}$ e ricordiamo che $tr(A) = \sum_i a_{ii}$, ottenendo

$$\Re(tr(A^\dagger)) = \Re\big(\sum_{i=1}^n a_{ii}^*\big) = \sum_{i=1}^n \Re(a_{ii}^*) = \sum_{i=1}^n \Re(a_{ii}) = \Re\big(\sum_{i=1}^n a_{ii}\big) = \Re(tr(A)).$$

4. Verifichiamo che i due sottoinsiemi siano sottospazi vettoriali reali. Dati $A, B \in \mathcal{A}$ una loro combinazione lineare a coefficienti reali appartiene ancora ad $\mathcal{A}$. Si verifica che $(\alpha A + \beta B)^\dagger = \alpha A^\dagger + \beta B^\dagger = \alpha A + \beta B$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Equivalentemente posso realizzare $\mathcal{A}$ come il nucleo dell'applicazione $\mathrm{id} + L$. La dimensione dell'immagine di $\mathrm{id} + L$ è data dal rango della matrice $1 + M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(L)$

$$\begin{pmatrix}
\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & & & & & \\
& \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} & & & & \\
& & \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} & & & \\
& & & \ddots & & \\
& & & & \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & & \iddots & 0 \\ \vdots & & 2 & & \vdots \\ 0 & \iddots & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix} & \\
& & & & & \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \ddots & & \iddots & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & \iddots & & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}
\end{pmatrix}$$

Notiamo che i blocchi con il -1 sulla antidiagonale hanno una colonna di 0 e le altre colonne linearmente dipendenti a coppie, il k-esimo di questi blocchi, di taglia $2k-1$, fornisce dunque $k-1$ colonne linearmente indipendenti. I blocchi con 1 sull'antidiagonale hanno invece sempre al centro una colonna linearmente indipendente dalle altre, il k-esimo blocco così fornisce k colonne linearmente indipendenti. Per un totale di $\sum_{k=1}^{n}(k-1) + \sum_{k=1}^{n} k = 2\sum_{k=1}^{n} k + n = n^2$ colonne linearmente indipendenti. Di conseguenza $rg(\mathrm{id} + L) = n^2$ da cui $\dim Ker(\mathrm{id} + L) = \dim\mathcal{A} = n^2$. Per trovare una base di $\mathcal{A}$ notiamo che l'insieme $\{I_{kl} + I_{lk}, E_{kl} - E_{lk}\}_{k,l=1,\ldots,n}$ è un sistema di generatori per $\mathcal{A}$. Non sono però tutti linearmente indipendenti, infatti gli elementi $I_{kl} + I_{lk}$ sono simmetrici sotto scambio di k e l dando $\frac{1}{2}n(n+1)$ vettori linearmente indipendenti. Mentre gli elementi $E_{kl} - E_{lk}$ sono antisimmetrici, fornendo $\frac{1}{2}n(n-1)$ vettori linearmente indipendenti. L'affiancamento di questi vettori linearmente indipendenti fornisce un insieme di n^2 vettori e dunque una base per $\mathcal{A}$
Attraverso un ragionamento analogo si arriva a dire che $\mathcal{S} = Ker(\mathrm{id} - L)$ è un sottospazio vettoriale reale di dimensione $\dim\mathcal{S} = n^2$. Di cui una base è data dai vettori linearmente indipendenti del seguente insieme $\{E_{kl} + E_{lk}, I_{kl} - I_{lk}\}_{k,l=1,\ldots,n}$.

Per verificare che $M(n,\mathbb{C}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$ dobbiamo innanzitutto dimostrare che hanno intersezione banale. Un elemento A di tale intersezione deve verificare che

$$\begin{cases} A = A^\dagger, \\ A = -A^\dagger. \end{cases} \implies A^\dagger = -A^\dagger, \implies A = -A, \implies A = 0.$$

È inoltre evidente che la loro somma dia tutto lo spazio. I due sottospazi sono dunque in somma diretta.

5. Per verificare che si tratti di un prodotto scalare dobbiamo verificarne che sia simmetrico e non degenere.
   La simmetria segue da un semplice conto, siano $A, B \in M(n,\mathbb{C})$

   $$\langle B, A\rangle = \Re(tr(BA^\dagger)) = \Re(tr((AB^\dagger)^\dagger)) = \Re(tr(AB^\dagger)^*) = \Re(tr(AB^\dagger)) = \langle A, B\rangle.$$

   Il prodotto scalare è non degenere se $\langle A, A\rangle \neq 0, \forall A \neq 0 \in M(n,\mathbb{C})$. Calcoliamo dunque $\langle A, A\rangle$ con $A = \{a_{ij}\}$,

   $$\langle A, A\rangle = \Re(tr(AA^\dagger)) = \Re\left(\sum_{i,j}(A)_{ij}(A^\dagger)_{ji}\right) = \Re\left(\sum_{i,j} a_{ij}a_{ij}^*\right) = \sum_{i,j}|a_{ij}|^2$$

   Essendo una somma di numeri reali non-negativi, $\langle A, A\rangle$ sarà nullo solo se tutti i termini della somma sono nulli, ossia $a_{ij} = 0 \, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, altrimenti sarà positivo. Abbiamo in questo modo mostrato anche la positività.

6. Dimostriamo che L è simmetrica:

   $$\langle L(A), B\rangle = \Re(tr(A^\dagger B^\dagger)) = \Re(tr((BA)^\dagger)) = \Re(tr(BA)) = \Re(tr(AB)) = \langle A, L(B)\rangle.$$

   Per il teorema spettrale allora esiste una base ortonormale di autovettori per L. Troviamo innanzitutto gli autovalori: poiché $L^2 = \mathrm{id}$ gli unici autovalori possibili sono ± 1. Dunque l'equazioni agli autovalori sono

   $$\begin{aligned} L(A) = A &\implies A^\dagger = A, \\ L(A) = -A &\implies A^\dagger = -A. \end{aligned}$$

   Risulta così evidente che gli autospazi corrispondenti sono $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$.

   Il fatto che L è una isometria discende dalla simmetria e dalla proprità $L^2 = \mathrm{id}$. Siano $A, B \in M(n,\mathbb{C})$

   $$\langle L(A), L(B)\rangle = \langle A, L^2(B)\rangle = \langle A, B\rangle.$$