§1.MINORI E RANGO DI UNA MATRICE

DEFINIZIONE. Data una matrice A diremo *minore di* A ogni *matrice quadrata* ottenuta cancellando alcune righe e/o colonne di A.

ESEMPIO: Se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

i minori sono al massimo matrici quadrate di ordine 3 (cioè 3×3):
(cancellando ogni volta una diversa colonna)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

ma anche le matrici quadrate di ordine 2 (cioè 2×2):
(cancellando la terza riga e, a rotazione, due colonne)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

(cancellando la seconda riga e, a rotazione, due colonne)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

(cancellando la prima riga e, a rotazione, due colonne)

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

ed infine le matrici quadrate di ordine 1 (cioè 1×1):
(in definitiva quelle costituite dai singoli elementi)

$$(a_{11}), \quad (a_{12}), \quad (a_{13}), \quad (a_{14}), \quad (a_{21}), \quad (a_{22}), \quad (a_{23}), \quad (a_{24}), \quad (a_{31}), \quad (a_{32}), \quad (a_{33}), \quad (a_{34}).$$

DEFINIZIONE. Data una matrice A diremo *rango di* A il massimo intero r tale che esiste *un minore di ordine* r *con determinante non nullo.*

ESEMPIO 1: Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.
RISOLUZIONE: al massimo i minori di A possono avere ordine 2. Vediamo se tra i minori di ordine 2 ce n'è almeno uno con determinante non nullo:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 6 - 6 = 0, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0,$$

quindi il rango è 2 (non è necessario calcolare il determinante del terzo minore d'ordine 2).

ESEMPIO 2: Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.
RISOLUZIONE: al massimo i minori di A possono avere ordine 2. Vediamo se tra i minori di ordine 2 ce n'è almeno uno con determinante non nullo:

$$\det\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 12 - 12 = 0, \quad \det\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = -6 + 6 = 0,$$

quindi il rango è minore di 2. Poichè i minori di ordine 1 hanno tutti determinante non nullo (basterebbe un elemento non nullo, qui sono tutti non nulli), il rango è 1.

OSSERVAZIONE: solo le matrici con tutti gli elementi nulli hanno rango 0.

§2.TEOREMA DI ROUCHE' – CAPELLI ED ESEMPI

Osserviamo i seguenti sistemi:

$$(S_1) \quad \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 6x - 3y = -9 \end{cases}, \qquad (S_2) \quad \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}.$$

Poichè hanno la stessa matrice dei coefficienti ed essa ha determinante nullo (verificatelo), siamo nel caso in cui il Teorema di Cramer dice solo che o il sistema non è risolubile, oppure ammette infinite soluzioni. Come distinguere in quale dei due casi ci si trova? A questo risponde il teorema di Rouchè–Capelli. Per meglio capire questo teorema, riscriviamo i sistemi precedenti nella forma:

$$(S_1) \quad \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3(2x - y) = 3 \cdot (-3) \end{cases}, \qquad (S_2) \quad \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3(2x - y) = 5 \end{cases}.$$

Allora, se x ed y sono soluzione della prima equazione di (S_1), sono anche soluzione della seconda (è la stessa moltiplicata per 3) e quindi comunque io scelga x, prendendo $y = 2x + 3$ (in modo cioè che sia soluzione della prima equazione), ottengo una soluzione di tutto il sistema. Quindi (S_1) ha infinite soluzioni (la retta di equazione $y = 2x+3$). Al contrario per il sistema (S_2), se x ed y verificano la prima equazione (cioè $y = 2x+3$), sicuramente non possono verificare la seconda (ho moltiplicato per 3 il primo membro ma non il secondo).

Allora (S_2) non ha nessuna soluzione. In (S_1) le due equazioni rappresentano la stessa retta, in (S_2) due rette parallele. Possiamo distinguere tra i due casi, andando a considerare le matrici

$$C_1 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & -3 & -9 \end{pmatrix}, \qquad C_2 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix},$$

ottenute in ogni caso aggiungendo a destra della matrice dei coefficienti la colonna dei termini noti. Si calcoli il rango di ciascuna delle matrici così ottenute. Si ottiene

$$rango(C_1) = 1, \qquad rango(C_2) = 2,$$

in quanto nel primo caso, anche i minori della matrice C_1 contenenti i termini noti hanno determinante nullo essendo i termini noti nella stessa proporzione dei coefficienti. Nel secondo caso invece, questa proporzionalità manca e quindi troviamo (due) minori con determinanti non nulli:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = 10 - 18 = -8, \qquad \det \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = -5 - 9 = -14.$$

In definitiva, per il sistema S_1, tanto la matrice dei coefficienti che la matrice C_1 hanno la "stessa proporzionalità" e quindi *rango* 1 e ci sono infinite soluzioni; per il sistema S_2, la matrice dei coefficienti ha *rango* 1, mentre la matrice C_2 ha *rango* 2 e non esistono soluzioni.

Sebbene le situazioni possano essere più articolate, vale in generale il seguente teorema:

TEOREMA DI ROUCHE' – CAPELLI Un sistema lineare (di m equazioni in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con $m, n \in \mathbf{N}$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

è risolubile se e solo se la matrice dei coefficienti A e la matrice C ottenuta da A aggiungendo la colonna di termini noti, hanno lo stesso rango.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE: In definitiva, possiamo trovarci nei seguenti casi:

(a) A quadrata, $\det A \neq 0 \Rightarrow$ applichiamo il Teorema di Cramer per calcolare l'unica soluzione.
(b) A quadrata, $\det A = 0$.
(c) A non quadrata.

Nei casi (b) e (c), per il teorema di Rouchè–Capelli:
(i) se $rango\,A \neq rango\,C$ non esistono soluzioni;
(ii) se $rango\,A = rango\,C$ esistono soluzioni.

Ecco come procedere al calcolo delle soluzioni nel caso (ii):
Se $k := rango\,A = rango\,C$, ci sarà un minore di rango k in A. Questo minore individua k variabili e k equazioni. Chiamiamo le k variabili individuate dal minore "le variabili fisse" e chiamiamo le rimanenti $n-k$ variabili le "variabili libere".

A questo punto procediamo come segue:

Passo 1) teniamo solo le k equazioni individuate dal minore non nullo e scartiamo le altre $n-k$ equazioni.

Passo 2) Nel sistema $k \times n$ che otteniamo dopo il Passo 1) teniamo a sinistra del segno di uguaglianza le k variabili fisse e mandiamo dall'altra parte le $n-k$ variabili libere che rinominiamo $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k}$ e che tratteremo come parametri.

Passo 3) Abbiamo dopo i primi 2 passi un sistema $k \times k$ con termini noti che dipendono dai termini noti iniziali e dai parametri $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k}$. A questo punto applichiamo Cramer a questo sistema quadrato. Le soluzioni date dalla regola di Cramer dipenderanno dagli $n-k$ parametri $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k}$.

ESEMPIO ($m < n$): Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 2 \\ -2x + 4y - z = -1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poichè per i minori di ordine (massimo) 2 si ha:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = -1 + 8 = 7,$$

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = 2 - 16 = -14,$$

A ha rango 2. Inoltre, poichè anche la matrice C (2×4) ha rango 2 (avendo tra i suoi minori quelli di A), ci troviamo nel caso (c)(ii) dell'osservazione che segue il Teorema. Allora:

Passo 1) poichè $k = rango\, A = rango\, C = 2 =$"numero di equazioni del sistema", non devo eliminare nessuna equazione.

Passo 2) Nel nostro sistema 2×3 teniamo a sinistra del segno di uguaglianza le 2 variabili fisse corrispondenti a un minore di rango 2, ad esempio x e z, e mandiamo dall'altra parte la variabile libera, in questo caso y che rinominiamo ponendo $t := y$ e che tratteremo come parametro. Quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} x + 4z = 2 + 2t \\ -2x - z = -1 - 4t \end{cases}.$$

Passo 3) Abbiamo dopo i primi 2 passi un sistema 2×2 con termini noti che dipendono dai termini noti iniziali e dal parametro t. A questo punto applichiamo Cramer a questo sistema quadrato. Le soluzioni date dalla regola di Cramer dipenderanno dal parametro $t \in \mathbf{R}$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2+2t & 4 \\ -1-4t & -1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-2 - 2t + 4 + 16t}{7} = \frac{2 + 14t}{7},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+2t \\ -2 & -1-4t \end{vmatrix}}{7} = \frac{-1 - 4t + 4 + 4t}{7} = \frac{3}{7}.$$

In definitiva si hanno infinite soluzioni $(x, y, z) = (\frac{2+14t}{7}, t, \frac{3}{7}), \forall t \in \mathbf{R}$ (verificare che è soluzione di tutte e tre le equazioni del sistema considerato inizialmente).

ESEMPIO $(m > n)$: Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -x + 2y = 5 \\ x + y = t \end{cases}$$

Vediamo se, almeno per qualche valore del parametro t il sistema è risolubile.
La matrice dei coefficienti è data da

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il rango di A è 2 poichè è non nullo il determinante del minore di ordine (massimo) 2 ottenuto eliminando la terza riga:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0.$$

Allora siamo nel caso (c) dell'osservazione che segue il Teorema. Perchè il sistema sia risolubile deve essere $rango\, C = rango\, A = 2$ (dove C è la matrice quadrata di ordine 3 ottenuta aggiungendo ad A la colonna dei termini noti). Poichè la matrice C ha A come sottomatrice, essa ha rango 3 o 2. Allora esistono soluzioni se C non ha rango 3 cioè se è nullo il determinante di C (calcolo il determinante secondo la terza riga):

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + t \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -5 - 4 - 17 + 5t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{26}{5}.$$

Concludendo:

- se $t \neq \frac{26}{5}$ il sistema non ha soluzioni;

- se $t = \frac{26}{5}$, la soluzione esiste. Essendo la matrice dei coefficienti delle prime due righe un minore di rango 2, posso eliminare la terza equazione (Passo 1)), ottenendo un sistema a cui si applica il Teorema di Cramer (Passo 3)) che fornisce la soluzione

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{9}{5}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{17}{5}.$$

Tale soluzione risolve tutte le tre equazioni del sistema per $t = \frac{26}{5}$.

ESERCIZIO (Compito di Settembre 2002) Considerare il sistema lineare dipendente dal parametro reale k

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ (k-2)x + (k-1)y + 2z = 1 \\ 3x + (k+1)y + z = 2 \end{cases}.$$

a) Determinare per quali valori di k il sistema ammette una ed una sola soluzione e calcolarla esplicitamente in funzione di k.
b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette più di una soluzione; per ognuno di tali valori di k calcolare esplicitamente tutte le soluzioni del sistema.