Quarto foglio esercizi tutor

Matteo Bruno

Dicembre 2023

Esercizio 1

Sia $V = \mathbb{R}^2$. Trovare autovalori e autovettori della matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Esercizio 2

Sia $\mathcal{B} := \{1 + 2x + x^2, x, 1 - x^2\}$ una base di $\mathbb{R}^2[x]$. Trovare la matrice del cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ alla base $\mathcal{B}$.
Dare la base $\mathcal{C}$ tale che la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ sia data da

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{C}$.
Dire se esiste una base $\mathcal{C}'$ tale che la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}'$ sia data da

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione 1

Per il teorema spettrale sappiamo che la matrice M_a è diagonalizzabile $\forall\, a \in \mathbb{R}$ poiché è sempre simmetrica.
Procediamo al calcolo degli autovalori, il polinomio caratteristico $p_a(\lambda) = \det(M_a - \lambda \mathbb{1})$ è dato da:

$$p_a(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ a & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - a^2 = \lambda^2 - (1 + a^2).$$

Tale polinomio ha due radici, ognuna di molteplicità algebrica 1, $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{1+a^2}$. Come ci aspettiamo dal teorema spettrale, queste soluzioni esistono per ogni $a \in \mathbb{R}$. Per semplicità chiamiamo $s_a := \sqrt{1+a^2}$.
Dobbiamo ora trovare gli autovettori, essi risolvono l'equazione

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \pm s_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Nel caso di autovalore $\lambda_1 = s_a$ dobbiamo allora risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 1-s_a & a \\ a & -1-s_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{pmatrix} 1-s_a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Dove si è sostituito alla seconda riga a volte a prima meno $(1-s_a)$ per la seconda. Si ottiene dunque $x_1 = \frac{a}{s_a-1}x_2$. Possiamo allora scrivere il generico autovettore v_1 come

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{a}{s_a-1}t \\ t \end{pmatrix}$$

dove t è un paramentro reale.
Un analogo procedimento è adottato per l'autovalore $\lambda_2 = -s_a$. In tal caso si ottiene il seguente sistema da risolvere

$$\begin{pmatrix} 1+s_a & a \\ a & -1+s_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{pmatrix} 1+s_a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Il quale ammette come soluzione $x_1 = -\frac{a}{s_a+1}x_2$. Il generico autovettore è dunque

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{s_a+1}r \\ r \end{pmatrix}$$

dove r è un parametro reale.

Soluzione 2

La matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{B}$ ha all'i-esima colonna il vettore delle coordinate del i-esimo vettore di $\mathcal{B}$ rispetto la base $\mathcal{E}$. Chiamiamo questa matrice B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allo stesso modo, la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$ ha all'i-esima colonna il vettore delle coordinate del i-esimo vettore di $\mathcal{C}$ rispetto la base $\mathcal{B}$. Di conseguenza è sufficiente prendere i termini dell'i-esima colonna della matrice C come coefficienti della combinazione lineare dei vettori di base $\mathcal{B}$ che mi dà l'i-esimo vettore della base $\mathcal{C}$. Ossia

$$\begin{aligned}
v_1 &= 1 \cdot (1 + 2x + x^2) + 1 \cdot x + 1 \cdot (1 - x^2) = 2 + 3x, \\
v_2 &= 1 \cdot (1 + 2x + x^2) + 0 \cdot x + 1 \cdot (1 - x^2) = 2 + 2x, \\
v_3 &= 2 \cdot (1 + 2x + x^2) + 1 \cdot x + 1 \cdot (1 - x^2) = 3 + 5x + x^2.
\end{aligned}$$

La base è dunque $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$.
Per trovare la matrice di cambaimento di base da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{C}$ è sufficiente collezionare in una matrice le coordinate rispetto la base $\mathcal{E}$ dei vettori appena trovati. Questa matrice sarà:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che la matrice D si scrive anche come $D = BC$.
Una base $\mathcal{C}'$ non può esistere in quanto la matrice C' non è invertibile. Infatti $\det C' = 0$, dunque ha nucleo non banale e l'immagine non genera tutto lo spazio (ossia le immagini dei vettori di base non formano una base).