Primo foglio esercizi tutor

Matteo Bruno

November 2023

Esercizio 1

Si consideri il campo dei numeri reali $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Si consideri il sottinsieme

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{\alpha + \sqrt{2}\beta\} \subset \mathbb{R}.$$

Dimostrare che le due operazioni di $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ inducono in questo sottinsieme una struttura di anello. Dimostrare che $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ è un campo.
Dare una struttura di spazio vettoriale a $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ sul campo $\mathbb{Q}$. Indicarne la dimensione e una base.
Quella indicata è l'unica struttura di spazio vettoriale possibile per $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$?

1 Soluzione

Per dare la struttura di anello dobbiamo considerare $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ munito di due operazioni binarie interne $\square$ e $\star$. È possibile difinire queste due operazioni considerando gli elementi di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ come elementi di $\mathbb{R}$ e usando le usuali nozioni di somma $+$ e prodotto $\cdot$.
L'operazione $\square$ sarà la somma, dati $x = a_1 + \sqrt{2}b_1$ e $y = a_2 + \sqrt{2}b_2$ la somma è definita da:

$$x \square y = (a_1 + \sqrt{2}b_1) + (a_2 + \sqrt{2}b_2) = (a_1 + a_2) + \sqrt{2}(b_1 + b_2).$$

È facile verificare l'associatività, ossia $(x \square y) \square z = x \square (y \square z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, usando l'associatività della somma $+$ in $\mathbb{R}$. Così come è immediata la verifica della commutatività.
L'elemento neutro rispetto la somma $\square$ è dato da $e = 0 + \sqrt{2} \cdot 0 = 0$ in quanto si deve avere che $x \square e = x$ per ogni $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
L'elemento inverso di $x = a + \sqrt{2}b$ rispetto alla somma $\square$, chiamato $\bar{x}$, deve soddisfare $x \square \bar{x} = e$. Dunque l'inverso è l'unico elemento di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ che soddisfa questa equazione, ossia $\bar{x} = -a + \sqrt{2}(-b)$.
Abbaimo dunque che $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \square)$ è un gruppo abeliano. Per verificare che $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \square, \star)$ sia un campo, dobbiamo accertarci che $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{e\}, \star)$ sia un

gruppo abeliano.
L'operazione prodotto $\star$ in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ è definita, per ogni $x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, da:

$$x \star y = (a_1 + \sqrt{2}b_1) \cdot (a_2 + \sqrt{2}b_2) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + \sqrt{2}(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Anche in questo caso associatività e commutatività discendono dalle proprietà associativa e commutativa del prodotto $\cdot$ in $\mathbb{R}$.
L'elemento neutro rispetto il prodotto $\star$, indicato da $\mathbb{1}$, deve soddisfare $x \star \mathbb{1} = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Da cui si ricava $\mathbb{1} = 1 + \sqrt{2}\,0 = 1$.
Queste proprietà ci assicurano che $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \Box, \star)$ è un anello commutativo unitario. Per essere un campo occorre trovare l'elemento inverso rispetto il prodotto $\star$. Possiamo supporre che l'inverso di $x = a + \sqrt{2}b \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, con $x \neq e$, sia l'usuale inverso in $\mathbb{R}$: $x^{-1} = \frac{1}{a+\sqrt{2}b}$. Ovviamenete il denominatore è non nullo per l'ipotesi che $x \neq e$, tuttavia non è evidente che $x^{-1} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Per verificare ciò moltiplichiamo e dividiamo x^{-1} per $a - \sqrt{2}b$ ottenendo:

$$x^{-1} = \frac{a - \sqrt{2}b}{a^2 - 2b^2}.$$

Il denominatore è non nullo poiché l'equazione $a^2 - 2b^2 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$. In questa forma è evidente che $x^{-1} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, costituendo dunque l'elemento inverso di $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ rispetto il prodotto $\star$.
Perciò $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \Box, \star)$ è un campo.

Per dare una struttura di spazio vettoriale su campo $\mathbb{Q}$ devo munire $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \Box)$ di un'operazione di prodotto per uno scalare. Dove uno scalare è un elemento di $\mathbb{Q}$. Ciò si puo fare semplicememte, per ogni $x = a + \sqrt{2}b \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ definisco la moltiplicazione per un qualunque $\lambda \in \mathbb{Q}$ come

$$\lambda x = (\lambda \cdot a) + \sqrt{2}(\lambda \cdot b).$$

Dove $\cdot$ è l'usuale moltiplicazione tra numeri razionali.
Con una tale struttura $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ è uno spazio vettoriale di dimensione due ed è, dunque, isomorfo a $\mathbb{Q}^2$. Una possibile base è data da $\{1 + \sqrt{2}\,0, 0 + \sqrt{2}\,1\}$.
Questa non è l'unica struttura di spazio vettoriale di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Posso infatti considerarlo come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, con il prodotto per uno scalare dato dal prodotto $\star$. In tal caso, è uno spazio vettoriale di dimensione uno e la base è data da un suo qualunque elemento (e.g. $\{1 + \sqrt{2}\,0\}$).