Primo foglio esercizi grandi

Matteo Bruno

Gennaio 2024

Esercizio grande

Si consideri $\mathbb{R}^3$ munito del seguente prodotto scalare indefinito

$$\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

1. Indicare un vettore v_0 tale che $\langle v_0, v_0\rangle = 0$. Fornire le equazioni cartesiane e una base per il sottospazio ortogonale $V^\perp$ di $V := Span\{v_0\} \subset \mathbb{R}^3$. Notare che V e $V^\perp$ non sono in somma diretta.
   Dimostrare che il sottoinsieme $C := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \langle x, x\rangle = 0\}$ **non** è un sottospazio vettoriale.

2. Data la matrice [1]
   $$\Lambda_\phi = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$
   Dimostrare che, per ogni $\phi \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare associata $L_\Lambda : x \mapsto \Lambda x$ è un endomorfismo ortogonale (isometria).
   Trovarne autovalori e autospazi e fornire una base $\mathcal{B}$ di autovettori.

3. Dimostrare che l'insieme
   $$\{\Lambda_\phi \in M(3, \mathbb{R}) \mid \phi \in \mathbb{R}\}$$
   è un gruppo. *Suggerimento*: vedere la dimostrazione della Proposizione 4 di Note sulla diagonalizzazione delle forme bilineari simmetriche.

4. Trovare la matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base $\mathcal{B}$.

5. Sia la matrice associata ad una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ data da
   $$M_{\mathcal{B}.\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

[1] Ricordiamo che le funzioni iperboliche sono definite come segue: $\cosh\phi = \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi})$ e $\sinh\phi = \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi})$. Soddisfando così l'equazione $(\cosh\phi)^2 - (\sinh\phi)^2 = 1$.

Dimostrare che L è simmetrica per il prodotto scalare dato. Trovare la matrice associata a L rispetto la base canonica $\mathcal{E}$.
Trovare l'immagine di V e $V^\perp$ rispetto a L. Sono ancora ortogonali?

1 Soluzione

1. Identificare un possibile v_0 è piuttosto semplice, noi sceglieremo $v_0 = (1,1,0)$. L'equazione di $V^\perp$ si trova ricordando che per definizione un generico elemento $w \in V^\perp$ soddisfa $\langle w, v_0 \rangle = 0$, questa condizione ci fornisce l'equazione $-x_1 + x_2 = 0$ che identifica $V^\perp$. Una possibile base di $V^\perp$ è dunque composta dai seguenti due vettori: $(1,1,0)$ e $(1,1,1)$.
I due sottospazi V e $V^\perp$ non sono in somma diretta in quanto $V \cap V^\perp = V$.

   C non è un sottospazio vettoriale poiché non è chiuso rispetto la somma. Consideriamo $v_0 = (1,1,0)$ e $v_1 = (-1,1,0)$, in tal modo $\langle v_0, v_0 \rangle = 0 = \langle v_1, v_1 \rangle$, è facile calcolare $\langle v_0 + v_1, v_0 + v_1 \rangle = 4$. Di conseguenza, $v_0 + v_1 \notin C$.

2. Per dimostrare che l'applicazione L_Λ sia una isometria dobbiamo verificare che $\langle \Lambda x, \Lambda y \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$. O, equivalentemente che $\Lambda^T A_\mathcal{E} \Lambda = A_\mathcal{E}$, dove $A_\mathcal{E}$ è la matrice del prodotto scalare rispetto la base canonica. Eseguendo il calcolo troviamo

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cosh\phi & \sinh\phi & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Perciò, l'applicazione L_Λ è ortogonale per ogni $\phi \in \mathbb{R}$.

   Notiamo che la matrice Λ è simmetrica, dunque, per il teorema spettrale, è diagonalizzabile. Il suo polinomio caratteristico è

$$p_\Lambda(t) = (1-t)(t^2 - 2t\cosh\phi + 1).$$

   Le cui radici sono $t_0 = 1$, $t_+ = \cosh\phi + \sinh\phi = e^\phi$, $t_- = \cosh\phi - \sinh\phi = e^{-\phi}$. Notiamo che nel caso $\phi = 0$ i tre autovalori coincidono. In particolare $\Lambda(\phi = 0) = 1$ dunque L_Λ coincide con l'operatore identità id, di conseguenza ogni vettore è autovettore.
Cerchiamo ora gli autovettori nel caso $\phi \neq 0$. L'autovettore riferito

all'autovalore t_0 si vede facilmente essere il terzo vettore della base canonica $e_3 = (0, 0, 1)$. Per quanto riguarda l'autovalore t_+ impostiamo il sistema

$$\begin{pmatrix} \cosh\phi - t_+ & \sinh\phi & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi - t_+ & 0 \\ 0 & 0 & 1 - t_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Ottenendo

$$\begin{pmatrix} -\sinh\phi & \sinh\phi & 0 \\ \sinh\phi & -\sinh\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Le prime due righe sono linearmente dipendenti. Nel caso $\phi \neq 0$, l'autospazio V_{t_+} è dunque definito dal sistema di due equazioni lineari:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Un possibile autovettore è dunque dato dal vettore $v_0 = (1, 1, 0)$.
Per quanto riguarda l'autovalore t_- il sistema

$$\begin{pmatrix} \cosh\phi - t_- & \sinh\phi & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi - t_- & 0 \\ 0 & 0 & 1 - t_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

fornisce due equazioni linearmente indipendenti

$$\begin{pmatrix} \sinh\phi & \sinh\phi & 0 \\ \sinh\phi & \sinh\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Nel caso $\phi \neq 0$, l'autospazio V_{t_-} è definito dal sistema di due equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Un possibile autovettore è dunque dato dal vettore $v_1 = (-1, 1, 0)$.
Scegliamo come base di autovettori la seguente: $\mathcal{B} = \{v_0, v_1, e_3\}$.

3. Seguendo la dimostrazione della Proposizione 4 dobbiamo verificare che l'inversa di Λ_ϕ appartenga ancora all'insieme dato. Così come il prodotto di due matrici qualunque dell'insieme.
   Date due matrici Λ_ϕ e Λ_φ il loro prodotto è dato da

$$\begin{aligned} \Lambda_\phi \Lambda_\varphi &= \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi & 0 \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\phi+\varphi) & \sinh(\phi+\varphi) & 0 \\ \sinh(\phi+\varphi) & \cosh(\phi+\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda_{\phi+\varphi}. \end{aligned}$$

Chiaramente $\Lambda_{\phi+\varphi}$ appartiene ancora all'insieme.
Da quaesto calcolo risulta anche evidente che $\Lambda_\phi^{-1} = \Lambda_{-\phi}$.
L'insieme dato è dunque un gruppo.

4. Per trovare la matrice del prodotto scalare è sufficiente calcolare quest'ultimo per tutte le possibili coppie di vettori di base. Quindi dobbiamo calcolare:

$$\begin{aligned}
&\langle v_0, v_0\rangle = 0, \\
&\langle v_1, v_0\rangle = 2, \quad \langle v_1, v_1\rangle = 0, \\
&\langle e_3, v_0\rangle = 0, \quad \langle e_3, v_1\rangle = 0, \quad \langle e_3, e_3\rangle = 1.
\end{aligned}$$

La matrice $A_\mathcal{B}$ del prodotto scalare rispetto la base $\mathcal{B}$ è data da

$$A_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Una applicazione lineare L è simmetrica se $\langle Lx, y\rangle = \langle x, Ly\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$. Fissando la base $\mathcal{B}$, ciò è equivalente a richiedere che $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L)^T A_\mathcal{B} = A_\mathcal{B} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L)$. Svolgiamo dunque il calcolo:

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L)^T A_\mathcal{B} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\
A_\mathcal{B} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dunque L è una applicazione simmetrica rispetto il prodotto scalare dato.

Per trovare la matrice associata ad L rispetto alla base $\mathcal{B}$, innanzitutto calcoliamo la matrice del cambiamento di coordinate dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{E}$.

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice associata a L rispetto la base canonica è data dalla magica formula

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(L) &= M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{id}) M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L) M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Per linearità di L, l'immagine di V tramite L è data da $L(V) = Span\{L(v_0)\}$. Conoscendo la matrice associata a L in base $\mathcal{B}$ si ricava semplicemente che $L(v_0) = -2v_1$. Da cui, $L(V) = Span\{v_1\}$. Le coordinate del vettore $(1, 1, 1)$ rispetto la base $\mathcal{B}$ sono $(1, 0, 1)$, le coordinate del vettore immagine sono

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza, la base di $L(V^{\perp})$ è data da $\{v_1, 2v_0 - 2v_1 + e_3\}$. Questo secondo vettore però non è ortogonale a v_1, infatti dal conto in coordinate risulta

$$(0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

Il supplemento ortogonale di $L(V)$ è invece definito dall'equazione $\langle x, v_1 \rangle = 0$, ossia $x_1 + x_2 = 0$ e ammette come base $\{v_1, e_3\}$.