CAPITOLO 2

FUNZIONI DI DUE O PIÙ VARIABILI

8. Cenni sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$

Indichiamo con il simbolo $\mathbb{R}^2$ l'insieme costituito dalle *coppie ordinate* di numeri reali, cioè

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y): \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}. \tag{8.1}$$

Rappresentiamo gli elementi, o *punti*, di $\mathbb{R}^2$ nell'usuale riferimento cartesiano come in figura 2.1. Talvolta identifichiamo il punto (x,y), o punto di *coordinate* x,y, con il *vettore* $v = (x,y)$ applicato all'origine degli assi, avente *componenti* x,y, come in figura 2.2.

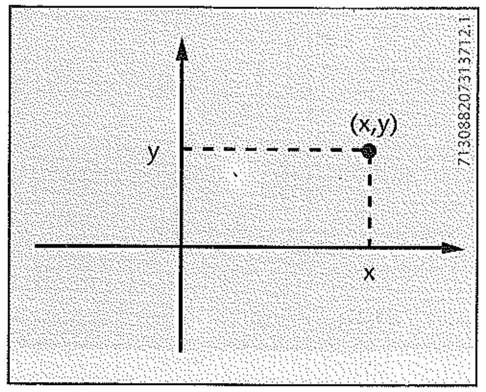

Figura 2.1

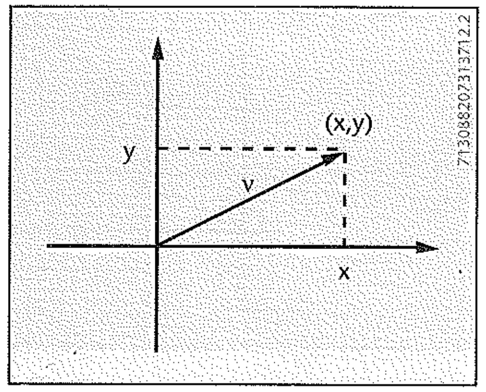

Figura 2.2

È utile definire la *somma* di due vettori v_1, v_2, di coordinate $v_1 = (x_1,y_1)$ e $v_2 = (x_2,y_2)$, nel modo seguente: il vettore somma $v_1 + v_2$ ha coordinate $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$, cioè

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)\,; \tag{8.2}$$

ciò corrisponde alla rappresentazione schematizzata in figura 2.3.

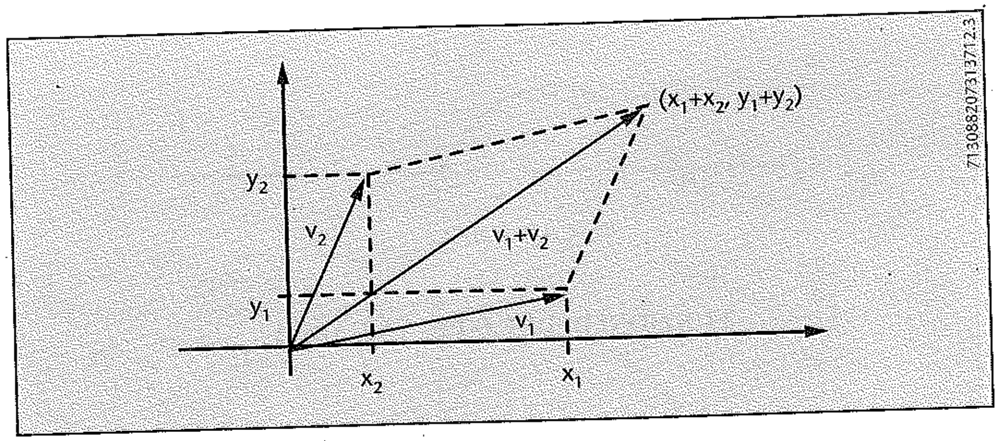

Figura 2.3

Analogamente si definisce la *moltiplicazione* di un vettore $v = (x,y)$ per uno scalare λ nel modo seguente

(8.3) $$\lambda \cdot v = (\lambda x,\ \lambda y)\ ,$$

con il significato geometrico schematizzato in figura 2.4.

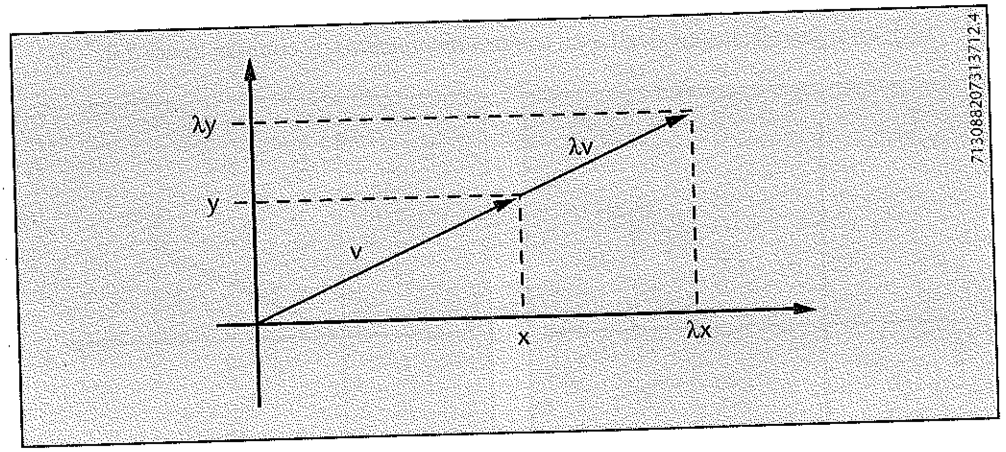

Figura 2.4

Con le operazioni di *somma* e di *moltiplicazione per uno scalare* l'insieme $\mathbb{R}^2$ si può riguardare come uno *spazio vettoriale*. Il *vettore nullo* ha componenti $(0,0)$, mentre l'*opposto* del vettore $v = (x,y)$ è il vettore $-v = (-x,\ -y)$ (si veda la figura 2.5).

Per ogni $v = (x,y)$ elemento di $\mathbb{R}^2$, indichiamo con il simbolo $|v| = |(x,y)|$ il *modulo*, o *norma*, di v la quantità

(8.4) $$|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Da osservare che si utilizza lo stesso simbolo $|\cdot|$ per indicare il *modulo* di un punto di $\mathbb{R}^2$ o il *valore assoluto* di un numero reale.

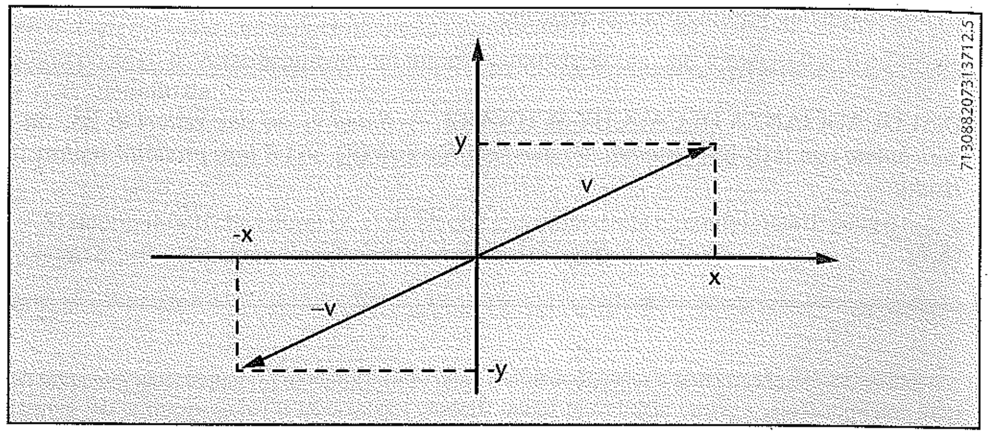

Figura 2.5

Il modulo di $v = (x,y)$ è quindi la *distanza* del punto (x,y) dall'origine degli assi $(0,0)$, od anche la *lunghezza* del vettore v, come rappresentato in figura 2.6.

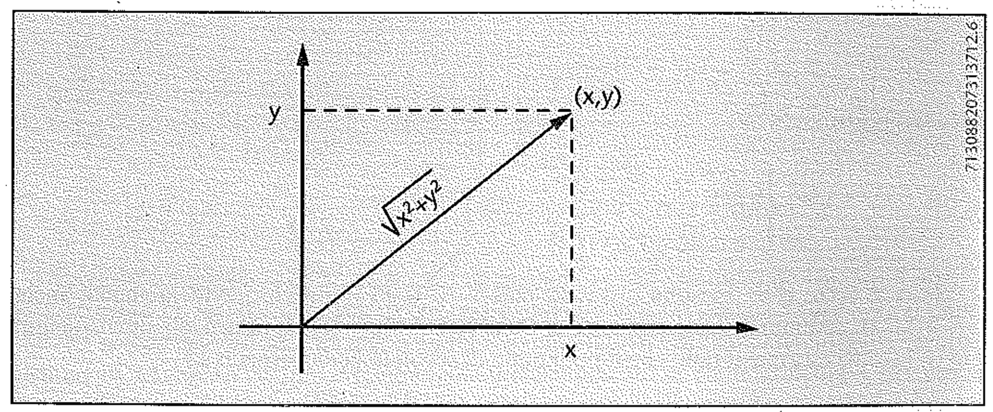

Figura 2.6

Il *prodotto scalare* di due vettori v_1, v_2 viene indicato con il simbolo $(v_1,\ v_2)$ (il lettore noti che si usa la stessa notazione per indicare il *prodotto scalare* fra due vettori e le *componenti* di un unico vettore); il prodotto scalare è definito nel modo seguente: se i vettori $(v_1,\ v_2)$ hanno coordinate

(8.5) $$v_1 = (x_1,\ y_2),\ v_2 = (x_2,\ y_2)\ ,$$

allora il *prodotto scalare* fra v_1 e v_2 vale

$$(v_1,\ v_2) = x_1x_2 + y_1y_2\ . \tag{8.6}$$

Particolarmente significativa è la seguente

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ. — *Siano v_1, v_2 due vettori di $\mathbb{R}^2$. Se indichiamo con $|v_1|$, $|v_2|$ i moduli dei due vettori e con $(v_1,\ v_2)$ il loro prodotto scalare, risulta*

$$|(v_1,\ v_2)| \le |v_1| \cdot |v_2|. \tag{8.7}$$

Il lettore osservi che, mentre a secondo membro della (8.7) il simbolo $|\cdot|$ rappresenta il *modulo* del vettore corrispondente, a primo membro lo stesso simbolo rappresenta il *valore assoluto* del numero reale $(v_1\ ,v_2)$.

Dimostrazione: con le notazioni $v_1 = (x_1,\ y_1)$, $v_2 = (x_2,\ y_2)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta

$$\begin{aligned} 0 &\le (x_1+tx_2)^2 + (y_1+ty_2)^2 \\ &= (x_1^2+y_1^2) + 2t(x_1x_2+y_1y_2) + t^2(x_2^2+y_2^2) \qquad (8.8) \\ &= \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma\,, \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\begin{cases} \alpha = x_2^2+y_2^2 = |v_2|^2 \\ \beta = x_1x_2+y_1y_2 = (v_1,\ v_2) \\ \gamma = x_1^2+y_1^2 = |v_1|^2 \end{cases} . \tag{8.9}$$

Se $\alpha \ne 0$ (se $\alpha = 0$ risulta $|v_2| = 0$, cioè $v_2 = 0$ ed in tal caso evidentemente anche $(v_1,\ v_2) = 0$; pertanto la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (8.7) si riduce alla ovvia identità $0 = 0$) la (8.8) esprime il fatto che il polinomio di secondo grado rispetto a t

$$t \longrightarrow \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma \tag{8.10}$$

è non negativo per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$. Ciò implica che il discriminante Δ dell'equazione di secondo grado associata verifica $\Delta \le 0$ (altrimenti, se fosse $\Delta > 0$, il polinomio associato si annullerebbe per due valori distinti t_1, t_2 e sarebbe negativo o all'interno dell'intervallo delle radici o all'esterno, in dipendenza del segno di α). Pertanto

$$\frac{\Delta}{4} = (v_1,\ v_2)^2 - |v_1|^2 \cdot |v_2|^2 \le 0 \tag{8.11}$$

che corrisponde alla tesi (8.7).

9. Elementi di topologia di $\mathbb{R}^2$

Esaminiamo di seguito alcune *proprietà topologiche* dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$.

Sia $(x_0,\ y_0)$ un punto fissato di $\mathbb{R}^2$. Un *intorno circolare* di $(x_0,\ y_0)$ è per definizione un *cerchio aperto* (cioè che *non* contiene la circonferenza che lo delimita) di centro $(x_0,\ y_0)$ e raggio positivo δ. Analiticamente, un intorno circolare di $(x_0,\ y_0)$ e raggio $\delta > 0$ è l'insieme $I_\delta \subset \mathbb{R}^2$ definito da

$$I_\delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}\ ; \tag{9.1}$$

Si ricordi infatti che i punti (x,y) di $\mathbb{R}^2$ che giacciono sulla circonferenza di centro $(x_0,\ y_0)$ e raggio $\delta > 0$ soddisfano l'equazione (si vedano le figure 2.7 e 2.8):

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \delta^2\ . \tag{9.2}$$

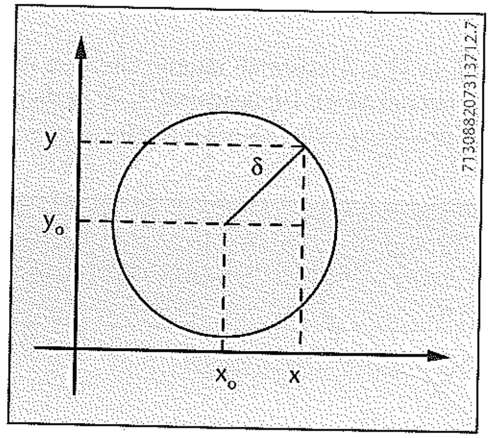

Figura 2.7

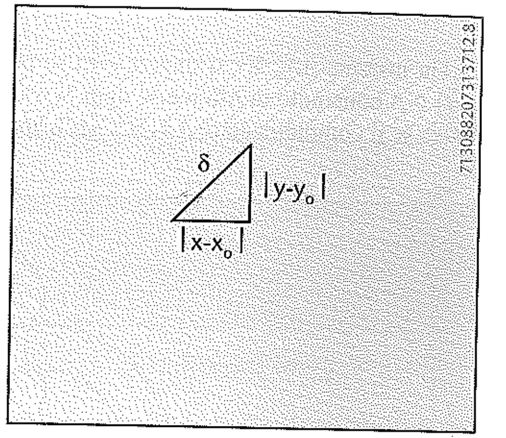

Figura 2.8

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ e $(x_0,\ y_0)$ un elemento di $\mathbb{R}^2$. Si dice che $(x_0,\ y_0)$ è *interno* ad A se esiste un intorno circolare di $(x_0,\ y_0)$ contenuto in A (si veda la figura 2.9); il punto $(x_0,\ y_0)$ si dice *esterno* ad A se esiste un intorno circolare di $(x_0,\ y_0)$ contenuto nel complementare di A (cioè se $(x_0,\ y_0)$ è interno al complementare di A, come in figura 2.10). Infine $(x_0,\ y_0)$ è un *punto di frontiera* per A se in ogni intorno circolare di $(x_0,\ y_0)$ si trovano sia punti di A che del complementare di A (cioè se $(x_0,\ y_0)$ non è né interno né esterno ad A, come in figura 2.11).

Si dice che $(x_0,\ y_0) \in \mathbb{R}^2$ è un *punto di accumulazione* per l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se in ogni intorno circolare di $(x_0,\ y_0)$ esiste almeno un punto di A diverso da $(x_0,\ y_0)$ (come in figura 2.12).

Si vede subito che tutti i punti interni ad un insieme A sono di accumulazione per A; tutti i punti esterni ad A non sono di accumulazione per A. Infine i punti di frontiera di A possono essere di accumulazione per A oppure no; se un punto di A non è di accumulazione, si dice che è un *punto isolato* di A.

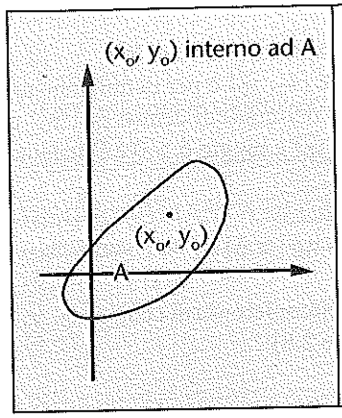

Figura 2.9

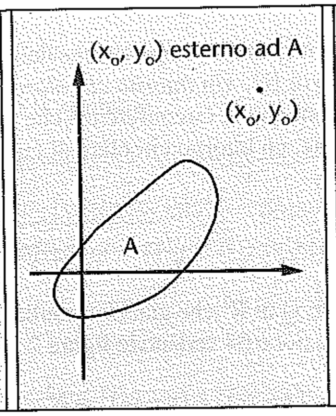

Figura 2.10

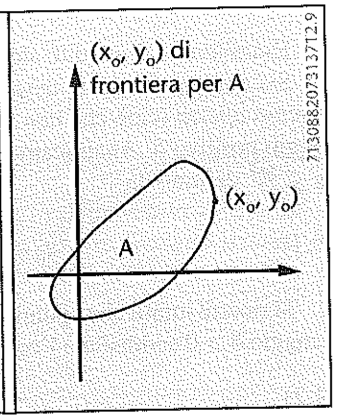

Figura 2.11

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice *aperto* se per ogni $(x,y) \in A$ esiste un intorno circolare di $(x,y) \in A$ contenuto in A (cioè se ogni $(x,y) \in A$ è interno ad A). Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice *chiuso* se il complementare $A = \mathbb{R}^2 - C$ è aperto.

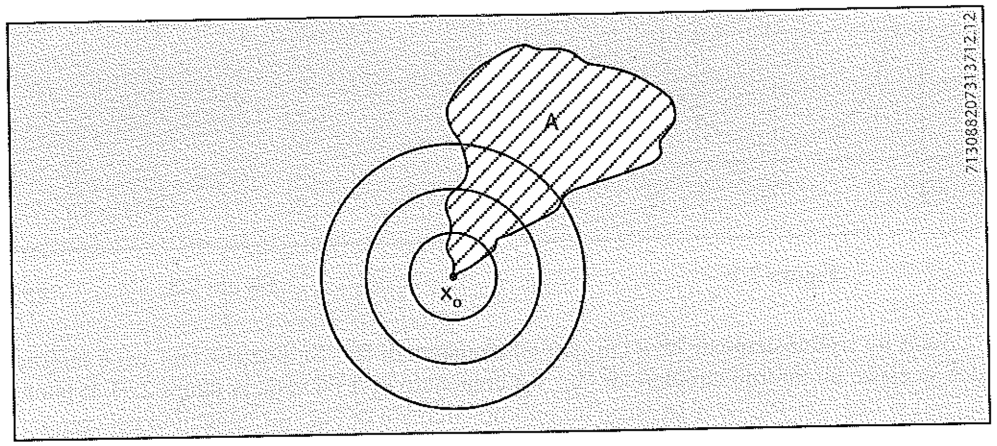

Figura 2.12

Naturalmente esistono insiemi di $\mathbb{R}^2$ che non sono né aperti né chiusi. L'insieme vuoto $\emptyset$ e tutto $\mathbb{R}^2$ sono gli unici insiemi di $\mathbb{R}^2$ contemporaneamente aperti e chiusi.

La *chiusura* di un insieme A, indicata con $\overline{A}$, è l'insieme di $\mathbb{R}^2$ risultante dalla unione di A e dell'insieme dei punti di accumulazione di A. La chiusura $\overline{A}$ di A è un insieme chiuso e, più precisamente, coincide con l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi che contengono A. Si prova anche che $\overline{A}$ è l'unione di A e dell'insieme dei punti di frontiera di A.

Un *dominio* di $\mathbb{R}^2$ è la chiusura di un insieme aperto. Pertanto un dominio è un insieme chiuso, ed è unione di un insieme aperto e della sua frontiera.

Ad esempio, un cerchio chiuso di $\mathbb{R}^2$ è un dominio, mentre l'insieme unione di un cerchio chiuso e di un punto isolato esterno al cerchio non è un dominio di $\mathbb{R}^2$.

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice *limitato* se è contenuto in un intorno circolare dell'origine $I_M(0)$, cioè se esiste $M > 0$ tale che

$$|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} \leq M, \qquad \forall (x,y) \in A \tag{9.3}$$

(equivalentemente, se $x^2+y^2 \leq M^2$ per ogni (x,y) in A), come nelle figure 2.13 e 2.14.

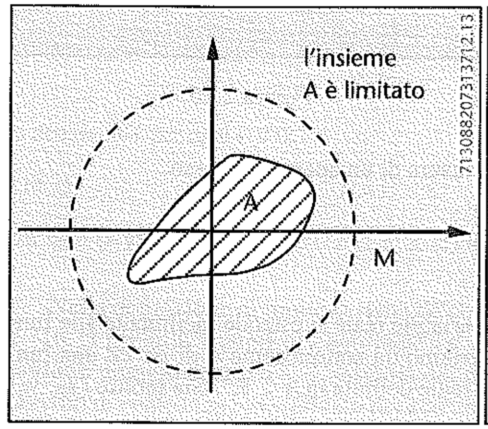

Figura 2.13

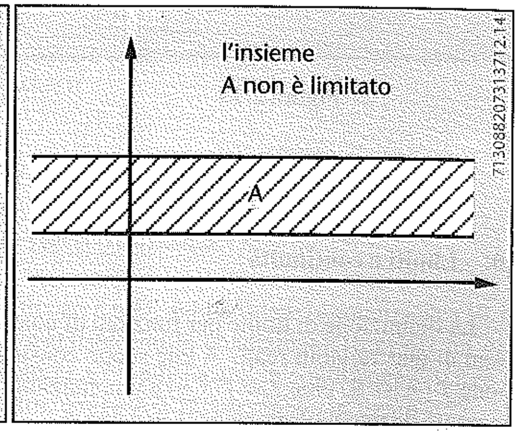

Figura 2.14

Un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è *connesso* se non esistono due aperti disgiunti non vuoti di $\mathbb{R}^2$ la cui unione sia l'insieme A. In formule, ciò significa che non esistono due aperti $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che

$$\begin{cases} A_1 \neq \emptyset, & A_2 \neq \emptyset \\ A_1 \cap A_2 = \emptyset, & A_1 \cup A_2 = A \end{cases}$$

In figura 2.15 è rappresentato un insieme connesso, mentre in figura 2.16 è rappresentato un insieme non connesso, per cui è invece possibile trovare due aperti disgiunti e non vuoti la cui unione è uguale all'insieme dato.

Equivalentemente, un insieme A è connesso se, nel caso in cui esistano due aperti $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad A_1 \cup A_2 = A, \tag{9.4}$$

allora necessariamente uno tra i due insiemi A_1, A_2 è vuoto.

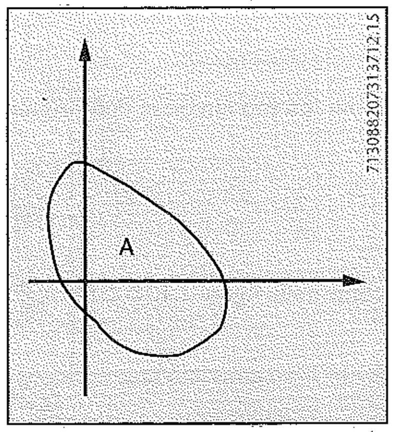

Figura 2.15

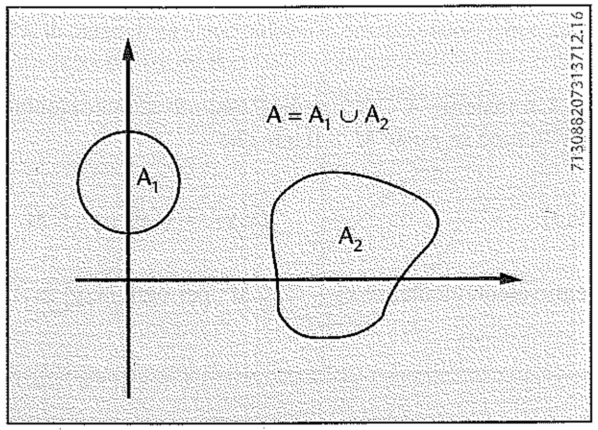

Figura 2.16

Infine, un *dominio* si dice *connesso* se è la chiusura di un aperto connesso.

10. Limiti e continuità

La definizione di limite per funzioni di una variabile reale si estende facilmente alle funzioni di due variabili reali. A tale scopo consideriamo un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ ed una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, cioè $f = f(x,y)$ è una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Sia inoltre (x_0, y_0) un punto di accumulazione per l'insieme A.

Consideriamo preliminarmente il caso in cui il limite l sia *finito*, cioè $l \in \mathbb{R}$. Si dice che $f(x,y)$ *tende* (o *converge*) ad l per (x,y) che tende ad (x_0,y_0) se, qualunque sia $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

(10.1) $$|f(x,y) - l| < \varepsilon,$$

per ogni $(x,y) \in A$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ e $|(x,y) - (x_0, y_0)| < \delta$, cioè

(10.2) $$0 \neq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$$

I due casi di limite infinito ($l = +\infty$, oppure $l = -\infty$) si trattano in modo analogo fra loro; consideriamo di seguito solo il caso $l = +\infty$.

Si dice che $f(x,y)$ *tende* (o *diverge*) a $+\infty$ per (x,y) che tende ad (x_0, y_0) se, qualunque sia $M > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

(10.3) $$f(x,y) > M,$$

per ogni $(x,y) \in A$, $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ e $|(x,y) - (x_0, y_0)| < \delta$, cioè (x,y) verifica le condizioni in (10.2).

A titolo di esempio, consideriamo la funzione delle variabili reali x, y

(10.4) $$f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

f è definita nell'aperto A costituito da $\mathbb{R}^2$ privato dell'origine, cioè $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Il punto $(0,0)$ è di accumulazione per A.

Verifichiamo che

(10.5) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0;$$

infatti, dalle disuguaglianze

(10.6) $$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2},$$

si deduce che, per ogni $\varepsilon > 0$,

(10.7) $$0 \leq f(x,y) < \varepsilon \qquad \text{(e quindi anche } |f(x,y)| < \varepsilon)$$

per ogni $(x,y) \neq (0,0)$ tale che $\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$; cioè vale la (10.2) con $\delta = \varepsilon$.

Nella definizione di limite si richiede che,fissato ε o M, debba valere la condizione (10.1) o (10.3) per tutti i punti di coordinate (x,y) soddisfacenti la condizione (10.2) per un opportuno numero positivo δ. L'insieme dei punti (x,y) soddisfacenti la condizione (10.2) è il cerchio di centro (x_0, y_0), privato del suo centro, e raggio δ, rappresentato in figura 2.17.

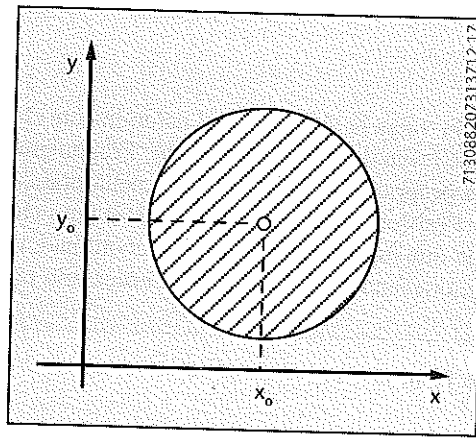

Figura 2.17

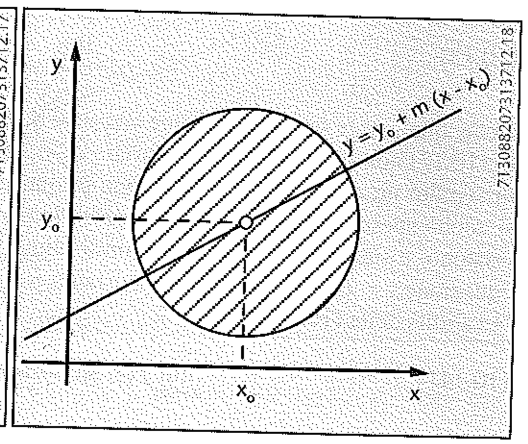

Figura 2.18

Invece di considerare *tutti* i punti del cerchio (privato del suo centro) rappresentato in figura 2.17, ci si può limitare a considerare i punti (x,y) di tale insieme, che appartengono ad una generica retta passante per il centro $(x_0,\ y_0)$, come in figura 2.18. I punti della retta (non parallela all'asse y) verificano l'equazione

$$y = y_0 + m(x - x_0)\,, \tag{10.8}$$

per un opportuno coefficiente angolare $m \in \mathbb{R}$.

Limitatamente ai punti di tale retta, si ottiene che, se $f(x,y)$ ammette limite $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ per $(x,y) \to (x_0,\ y_0)$, allora, posto $y = y_0 + m(x - x_0)$, risulta anche

$$|f(x, y_0 + m(x - x_0)) - l| < \varepsilon \tag{10.9}$$

(o rispettivamente $f(x, y_0 + m(x - x_0)) > M$, oppure $f(x,\ y_0 + m(x - x_0)) < -M$), per tutti i numeri reali $x \neq x_0$ e tali che

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{(x-x_0)^2 + m^2(x-x_0)^2} \tag{10.10}$$

$$= \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{(x-x_0)^2} = \sqrt{1+m^2} \cdot |x - x_0| < \delta\,.$$

Quindi vale la (10.9) (o le analoghe condizioni per il limite infinito) purché

$$0 \neq |x - x_0| < \delta' = \frac{\delta}{\sqrt{1+m^2}}\,. \tag{10.11}$$

In base alla definizione di limite per funzioni di *una* variabile, ciò significa che

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y_0 + m(x - x_0)) = l\,. \tag{10.12}$$

Pertanto, *condizione necessaria* affinché esista il limite della funzione di due variabili

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,\, y_0)} f(x,y) = l\,, \tag{10.13}$$

è che, qualunque sia il coefficiente angolare $m \in \mathbb{R}$, valga la (10.12), con l naturalmente che in (10.12) non deve cambiare al variare di m, cioè l *non* deve dipendere da m. Proponiamo di seguito un esempio di applicazione di questa proprietà. Osserviamo che, nella pratica, si adotta spesso come condizione necessaria per l'esistenza del limite in (10.13) il fatto che esistono, e siano fra loro uguali, i limiti lungo le due rette parallele agli assi coordinati, di equazione $y =$ costante $= y_0$ e $x =$ costante $= x_0$, ottenendo come condizione necessaria per la validità della (10.13).

$$\lim_{x \to x_0} f(x,\ y_0) = \lim_{y \to y_0} f(x_0,\ y) = l\,. \tag{10.14}$$

Verifichiamo che

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \textit{non esiste}\,. \tag{10.15}$$

Infatti, posto $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$, abbiamo

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1\,, \tag{10.16}$$

$$\lim_{y \to 0} f(0,y) = \lim_{y \to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1\,, \tag{10.17}$$

e quindi non è soddisfatta la condizione di uguaglianza (si veda la (10.14) dei due limiti per $x \to 0$ e per $y \to 0$, necessaria per l'esistenza del limite. Ciò prova la (10.15).

Si noti che, lungo ogni retta per l'origine, di equazione $y = mx$, la funzione $f(x,y)$ è costante, essendo

$$f(x, mx) = \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}\,, \qquad \forall x \neq 0 \tag{10.18}$$

Pertanto risulta che il limite, per $x \to 0$, su ogni retta per l'origine esiste, ma dipende dal coefficiente m; infatti

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}\,, \tag{10.19}$$

e ciò di nuovo implica che il limite della funzione di due variabili in (10.15) non esiste.

In figura 2.19 è rappresentato il valore della funzione $f(x,y)$ in corrispondenza ad ogni retta per l'origine, su cui $f(x,y)$ è costante.

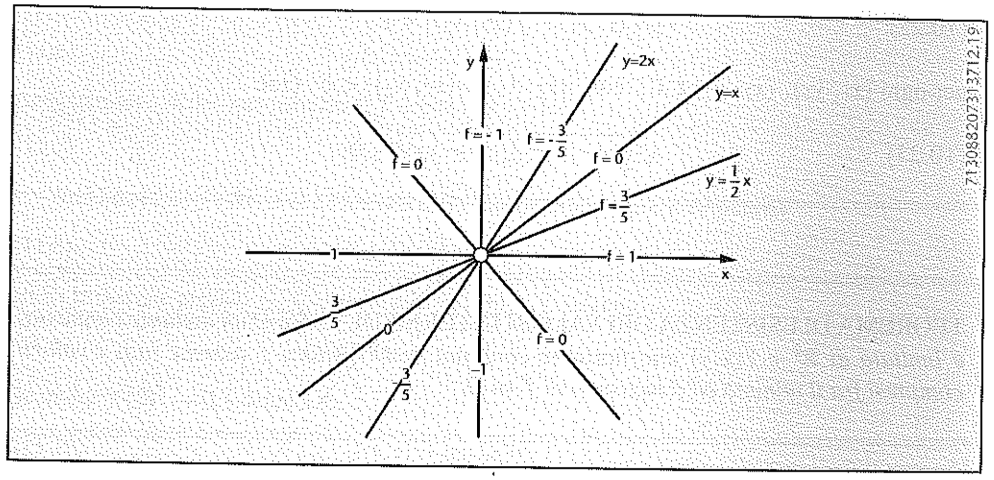

Figura 2.19

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili definita in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $(x_0,\ y_0)$ un punto di A. Si dice che la funzione $f(x,y)$ è *continua* in (x_0, y_0) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon \tag{10.20}$$

per ogni $(x,y) \in A$ e $|(x,y)-(x_0,y_0)| < \delta$. Si osservi che se (x_0,y_0) è un punto di accumulazione per A la continuità di f in (x_0,y_0) equivale a richiedere che la funzione abbia limite nel punto uguale proprio a $f(x_0,y_0)$. Se invece (x_0,y_0) è un punto isolato, la (10.20) è sempre verificata in un opportuno intorno del punto. Si dice inoltre che $f(x,y)$ è *continua nell'insieme* A se è continua in ogni punto (x_0,y_0) di A.

Terminiamo il paragrafo enunciando alcuni importanti teoremi sulle funzioni continue di due variabili, che estendono analoghi risultati per funzioni di una variabile.

TEOREMA DI WEIERSTRASS. — *Sia C un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$ e sia $f(x,y)$ una funzione continua definita su C. Allora f assume massimo e minimo (assoluti) su C, cioè esistono due punti (x_1, y_1) e (x_2,y_2) di C tali che*

(10.21) $$f(x_1, y_1) \le f(x,y) \le f(x_2, y_2), \qquad \forall (x,y) \in C.$$

TEOREMA DI CANTOR. — *Sia C un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$ e sia $f(x,y)$ una funzione continua definita in C. Allora f è uniformemente continua su C; cioè, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che*

(10.22) $$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon,$$

per ogni (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in C$, con $|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta$, cioè

(10.23) $$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} < \delta.$$

TEOREMA DI ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI. — *Sia D un dominio connesso e limitato di $\mathbb{R}^2$ e $f(x,y)$ una funzione continua su D. Allora f assume tutti i valori compresi fra il minimo ed il massimo di f su D.*

11. Derivate parziali

Sia A un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f = f(x,y)$ una funzione di due variabili definita su A. Sia inoltre (x,y) un punto fissato di A. La *derivata parziale di f rispetto ad x*, nel punto (x,y), è il limite

(11.1) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$

purché tale limite esista e sia finito. Tale derivata parziale di f rispetto ad x si indica con uno dei simboli, fra loro equivalenti,

(11.2) $$\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial x} f, \ f_x, \ f_x(x,y), \ D_x f.$$

Analogamente, la *derivata parziale di f rispetto ad y*, nel punto (x,y), è il limite

(11.3) $$\lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k},$$

purché tale limite esita e sia finito. La derivata parziale di f rispetto a y si indica con uno dei simboli

(11.4) $$\frac{\partial f}{\partial y}, \ \frac{\partial}{\partial y} f, \ f_y, \ f_y(x,y), \ D_y f.$$

In base alle definizioni, le due derivate parziali di f rispetto ad x o ad y si calcolano considerando l'altra variabile (rispettivamente y o x) fissata, quindi costante. Pertanto, nel calcolo di una derivata parziale, entra in gioco *una sola* variabile reale alla volta; è quindi possibile utilizzare le usuali regole di derivazione valide per le funzioni di *una* variabile reale.

Come primo caso consideriamo la funzione di due variabili

(11.5) $$f(x,y) = x^2 - 3xy + 5y^2.$$

Nel calcolare la derivata di f rispetto ad x la variabile y risulta fissata, cioè costante. Si ottiene

(11.6) $$f_x(x,y) = 2x - 3y.$$

Analogamente, la derivata parziale di f rispetto ad y vale

(11.7) $$f_y(x,y) = -3x + 10y.$$

Se ad esempio $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è funzione delle due variabili reali x, y, definita da

(11.8) $$f(x,y) = x^2 \cos y,$$

allora le derivate parziali f_x, f_y rispetto alle variabili x, y, valgono

(11.9) $$f_x = 2x\cos y, \qquad f_y = -x^2 \operatorname{sen} y.$$

Se invece $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è definita da

(11.10) $$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy),$$

le derivate parziali sono date da

(11.11) $$f_x = y\cos(xy), \qquad f_y = x\cos(xy).$$

Se in un punto (x,y) esistono entrambe le derivate parziali $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, si dice che la funzione f è *derivabile in* (x,y). Inoltre, se f è derivabile in ogni punto $(x,y) \in A$, si dice che f è *derivabile in* A.