

A.A. 2015-2016. CORSO DI ALGEBRA 1.
PROFF. P. PIAZZA, E. SPINELLI.
ESERCITAZIONI. FOGLIO SPECIALE 3.

Definizione. Diremo che un anello A è *noetheriano* se per ogni successione ascendente di ideali

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$$

esiste un opportuno $r \in \mathbb{N}$ tale che $I_n = I_r$ per ogni $n \geq r$.

Esercizio S.3.1. Stabilire se $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, \dots]$, l'anello dei polinomi a coefficienti in \mathbb{K} in un'infinità numerabile di variabili, è un anello noetheriano o meno.

Esercizio S.3.2. Sia A un anello commutativo unitario.

(A) Dimostrare che se abbiamo una catena ascendente di ideali di A , $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$ allora l'insieme $I := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ è ancora un ideale di A .

(B) Mostrare che le seguenti sono equivalenti:

- (1) A è noetheriano;
- (2) Ogni ideale di A è finitamente generato.

[Suggerimento. Per l'implicazione (1) \Rightarrow (2) si ragioni per assurdo.]

(C) Dimostrare che se A è noetheriano e booleano¹ allora è un PID.

Esercizio S.3.3.² Sia A un dominio di integrità. Supponiamo che per ogni ideale $(0) \neq I \subset A$ esistano un ideale $(0) \neq J \subset A$ ed un elemento $d \in A$ tali che: $I \cdot J = (d)$.

(A) Dimostrare che esiste un ideale finitamente generato $J' = (b_1, \dots, b_k)$ tale che $I \cdot J' = (d)$.

[Suggerimento. Si esprima d come combinazione lineare di prodotti di elementi di I e di J]

(B) Dimostrare che per ogni $i \in I$ e per ogni $\ell = 1, \dots, k$ esistono $a_\ell \in A$ tali che $i b_\ell = a_\ell d$.

(C) Dimostrare che A è noetheriano. [Suggerimento. Sia $f \in I$, provare a scrivere il prodotto $f \cdot d$ in termini dei fattori i_k che compaiono nella scrittura di d come somma di prodotti di elementi di I e di J . Sfruttare l'ipotesi " A è un dominio"]

Esercizio S.3.4 (Teorema della base di Hilbert). Sia A un anello commutativo unitario noetheriano.

(A) Sia $I \subseteq A[X]$ un ideale. Dimostrare che per ogni $j \in \mathbb{N}$ l'insieme $I_j \subseteq A$ dei coefficienti direttori dei polinomi $P \in I$ tali che $\deg(P) = j$ e da 0_A è un ideale di A . Osservare che vale $I_j \subseteq I_{j+1}$ e che la successione $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ si stabilizza. [Suggerimento. Usare la moltiplicazione per X per vedere l'inclusione]

(B) Sia $r \in \mathbb{N}$ il più piccolo numero naturale per cui $I_n = I_r$ per ogni $n \geq r$. Per ciascun $j = 0, \dots, r$ sia $\Sigma_j = \{a_{j1}, \dots, a_{jn_j}\}$ un insieme di generatori di I_j . Siano infine $\{P_{jk}\}$ con $j = 0, \dots, r$, $k = 1, \dots, n_j$ una famiglia di polinomi tale che il coefficiente direttore di P_{jk} sia l'elemento a_{jk} . Sia $P \in I$ tale che $d = \deg(P) > r$; mostrare che esistono $c_{1r}, \dots, c_{n_r r} \in A$ tali che $\deg(P - \sum_{i=1}^{n_r} c_{ir} X^{d-r} P_{ri}) < \deg(P)$.

¹Vedere il Foglio 11 per la definizione di anello booleano ed alcune proprietà.

²Tratto dagli esercizi della Prof.ssa P. Gianni.

(C) Nella stessa notazione di prima, assumiamo che $d = \deg(P) \leq r$. Mostrare che esistono $\{c_{id}\} \subseteq A$ tali che

$$\deg\left(P - \sum_{i=1}^{n_d} c_{id} P_{di}\right) < \deg(P)$$

Sfruttando (B) e ragionando per induzione sul grado di un generico polinomio $P \in I$ dedurre che $I = (\{P_{jk}\})$.

Nei punti (A) — (C) abbiamo dimostrato il Teorema della base di Hilbert: se A è un anello unitario commutativo noetheriano allora $A[X]$ è noetheriano.

(D) Dimostrare che se A è un anello commutativo unitario noetheriano allora $A[X_1, \dots, X_n]$ è noetheriano. [Suggerimento. $A[X_1, \dots, X_n] = A[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$]

Definizione. Diremo che un anello A è *artiniano* se per ogni successione discendente di ideali

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$$

esiste un opportuno $r \in \mathbb{N}$ tale che $I_n = I_r$ per ogni $n \geq r$.

Esercizio S.3.5. Sia $\mathbb{K}[X]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in \mathbb{K} nella variabile X ; dimostrare che non è artiniano.

Esercizio S.3.6. Sia A un dominio d'integrità artiniano. Dimostrare che A è un campo. [Suggerimento. Considerare gli ideali generati dalle potenze successive di un elemento $a \in A$]

Definizione. Sia A un anello commutativo unitario. Un ideale $I \subseteq A$ è detto *primo* se $x \cdot y \in I$ implica $x \in I$ o $y \in I$. Un ideale $0_A \subsetneq I \subsetneq A$ è detto *massimale* se non esiste alcun ideale J di A che contiene propriamente I .

Esercizio S.3.7. Sia A un anello commutativo unitario. Dimostrare che I è massimale se e soltanto se A/I è un campo. [Suggerimento. Sfruttare il teorema di corrispondenza]

Esercizio S.3.8. Sia A un anello commutativo unitario. Dimostrare che I è un ideale primo di A se e solo se A/I è un dominio di integrità.

Esercizio S.3.9.³ Sia A un anello commutativo unitario artiniano.

(A) Sia I un ideale. Sfruttare il teorema di corrispondenza tra gli ideali di A contenenti I e gli ideali di A/I per dimostrare che A/I è artiniano.

(B) Dimostrare che in A ogni ideale primo è massimale. [Suggerimento. Sfruttare il punto (A) e i due esercizi precedenti]

(C) Dimostrare che ogni dominio di integrità che è quoziente di un artiniano è un campo.

Esercizio S.3.10. Sia A un anello commutativo unitario tale che per ogni ideale $I \subseteq A$ risulti $\mathcal{A}(\mathcal{A}(I)) = I$ (denotiamo con $\mathcal{A}(I)$ l'annullatore dell'ideale I , vedere il Foglio 9). Dimostrare che A è artiniano se e soltanto se è noetheriano.

³Tratto da *An introduction to commutative algebra* di M. Atiyah, I.G. MacDonald.