A.A. 2015-2016. CORSO DI ALGEBRA 1.
PROFF. P. PIAZZA, E. SPINELLI.
ESERCITAZIONI. FOGLIO SPECIALE 1.

Esercizio S.1. 1. Siano G e G' due gruppi finiti. Sia $\varphi : G \to G'$ un omomorfismo suriettivo e sia $H' < G'$. Dimostrare che:

$$[G' : H'] = [G : \varphi^{-1}(H')]$$

[*Suggerimento. Mostrare che* $\varphi^{-1}(H')$ *è un sottogruppo di* G*. Ragionare sulle preimmagini tramite* φ *delle classi laterali di* G *modulo* H']

Esercizio S.1.2. Sia S_n il gruppo simmetrico su n elementi (ovvero l'insieme delle applicazioni biettive da $\{1, \dots, n\}$ in sé). Sia $\mathrm{Stab}_{S_n}(1) = \{\gamma \in S_n \mid \gamma(1) = 1\}$.
(A) Mostrare che $\mathrm{Stab}_{S_n}(1)$ è un sottogruppo di S_n.
(B) Mostrare che $[S_n : \mathrm{Stab}_{S_n}(1)] = n$. [*Suggerimento. Stabilire un isomorfismo tra* S_{n-1} e $\mathrm{Stab}_{S_n}(1)$]

Esercizio S.1. 3. Sia H un sottogruppo di S_n con la seguente proprietà: per ogni coppia $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ esiste $h \in H$ tale che $h(i) = j$. Sia $\mathrm{Stab}_H(1) = \{\gamma \in H \mid \gamma(1) = 1\}$.
(A) Mostrare che $\mathrm{Stab}_H(1)$ di un sottogruppo di H.
(B) Mostrare che $[H : \mathrm{Stab}_H(1)] = n$. [*Suggerimento. Utilizzare la proprietà verificata da* H *per caratterizzare i laterali di* $\mathrm{Stab}_H(1)$.]

Esercizio S.1.4. Sia X un insieme finito, denotiamo con $S(X)$ l'insieme delle mappe biettive da X in X (ovvero l'insieme delle permutazioni sugli elementi di X). Sia $\varphi : G \to S(X)$ un omomorfismo e supponiamo che $Im(\varphi)$ sia tale che per ogni coppia $(x, y) \in X \times X$ esista $\sigma \in Im(\varphi)$ tale che $\sigma(x) = y$. Sia $x_0 \in X$ fissato. Dimostrare che $[G : \varphi^{-1}(\mathrm{Stab}_{Im(\varphi)}(x))] = |\, X\,|$.

Richiami e notazioni. Ricordiamo che, in generale, l'anello degli interi modulo n, $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è un anello commutativo unitario. Dalla teoria sappiamo che $\mathbb{Z}_n$ è un campo se e soltanto se n è un numero primo. Denoteremo il campo finito di cardinalità prima q con $\mathbb{F}_q$ invece di $\mathbb{Z}_q$, per coerenza con l'usuale notazione per i campi finiti. Denoteremo infine con $\mathbb{F}_q^*$ il gruppo moltiplicativo del campo finito $\mathbb{F}_q$ (ovvero gli invertibili di $\mathbb{Z}_q$).

Esercizio S.1.5. Sia $q \in \mathbb{N}$ un numero primo. Sia $\mathbb{F}_q$ il campo finito di ordine q.
(A) Verificare che $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ è un $\mathbb{F}_q$-spazio vettoriale rispetto alla somma coordinata per coordinata e al prodotto per scalari in $\mathbb{F}_q$.
(B) Determinare per elencazione l'insieme $\mathcal{R}_{\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q}$ delle rette[1] in $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$.
(C) Sia $GL_2(\mathbb{F}_q)$ il gruppo delle trasformazioni lineari invertibili da $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ in sé (in altre parole $GL_2(\mathbb{F}_q)$ è il gruppo delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{F}_q$ e determinante diverso da $\overline{0}$). Verificare che la formula per determinare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$ è la seguente:

$$\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}^{-1} = \det\left(\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \overline{d} & -\overline{b} \\ -\overline{c} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

(D) Mostrare che

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} \;\Big|\; \overline{a}\overline{d} - \overline{b}\overline{c} = \overline{1},\ \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in \mathbb{F}_q \right\}$$

[1] L'insieme degli $\mathbb{F}_q$-sottospazi vettoriali di dimensione 1.

è un sottogruppo normale di $GL_2(\mathbb{F}_q)$.
(E) Mostrare che $\det : GL_2(\mathbb{F}_q) \to \mathbb{F}_q^*$ è un omomorfismo di gruppi il cui nucleo coincide con $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$.
(F) Mostrare che il seguente sottoinsieme di $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ è un sottogruppo:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{0} & \overline{a}^{-1} \end{pmatrix} \;\Big|\; \overline{b} \in \mathbb{F}_q,\ \overline{a} \in \mathbb{F}_q^* \right\}$$

(G) Sia $\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \to S(\mathcal{R}_{\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q})$ definita da $\varphi : A \mapsto \sigma_A$ dove $\sigma_A : \mathcal{R}_{\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q} \to \mathcal{R}_{\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q}$ è data da $r \mapsto A\cdot r$. Mostrare che si tratta di un omomorfismo. Osservare che $Im(\varphi)$ ha la proprietà che per ogni coppia $(r_1, r_2) \in \mathcal{R}^2_{\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q}$ esiste $\sigma \in Im(\varphi)$ tale che $\sigma(r_1) = r_2$.
(H) Mostrare che $B = \varphi^{-1}\left(\mathrm{Stab}_{Im(\varphi)}(\mathbb{F}_q\cdot(1,0))\right)$. Dedurne che $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) : B] = q+1$ e che $|\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)\,| = q\,(q^2-1)$. [*Suggerimento. Sfruttare l'esercizio* S.1.4]