A.A. 2015-2016. CORSO DI ALGEBRA 1.
PROFF. P. PIAZZA, E. SPINELLI.
ESERCITAZIONI. FOGLIO 9.

Esercizio 9.1. Consideriamo l'anello $\mathbb{Z}[X]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}$.

(A) Consideriamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{Z}[X]$:

$$\mathbb{Z}_{\mathscr{P}}[X] = \left\{ P \in \mathbb{Z}[X] \;\middle|\; P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i,\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in 2 \cdot \mathbb{Z} \right\}$$

Dimostrare che si tratta di un ideale di $\mathbb{Z}[X]$.
(B) Descrivere l'anello quoziente $\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}_{\mathscr{P}}(X)$ (determinare un sistema di rappresentanti, descrivere la moltiplicazione tra due classi in $\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}_{\mathscr{P}}[X]$ sfruttando il sistema di rappresentanti scelto).
(C) Definiamo ora l'insieme $\mathbb{Z}_{\mathscr{P}}^{\geq n}[X] = \mathbb{Z}_{\mathscr{P}}[X] \cap \mathbb{Z}^{\geq n}[X]$, dove denotiamo con $\mathbb{Z}^{\geq n}[X]$ l'insieme dei polinomi di grado $\geq n$ unito all'elemento $0 \in \mathbb{Z}$. Si tratta ancora di un ideale? Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} \mathbb{Z}_{\mathscr{P}}^{\geq n}[X] = \{0\}$. [*Suggerimento. Si osservi che* $\mathbb{Z}_{\mathscr{P}}^{\geq n}[X] = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{\mathscr{P}}^{\geq i}[X]$]

Esercizio 9.2. Sia A un anello unitario. Supponiamo che $a \in A$ sia un elemento invertibile di ordine finito (dunque tale che $a^n = 1_A$ per un opportuno n) e supponiamo che non sia zero di nessun polinomio $\sum_{i=0}^{j} (-1_A)^{\delta_i} X^i$ per $j < n$ con $\delta_i \in \{0, 1\}$. Mostrare che $(1_A - a)$ è un divisore di 0_A. Mostrare che se $o(a)$ è pari allora $(1_A + a)$ è un divisore di 0_A. Cosa possiamo dire di $(1_A + a)$ nel caso in cui $o(a)$ sia dispari? Si tratta anche in questo caso di un divisore di 0_A? [*Suggerimento. Sfruttare la formula per scrivere la somma/differenza di due potenze n-sime. Per l'ultima domanda si osservi che se a ha ordine dispari* a^2 *ha lo stesso ordine*]

Esercizio 9.3. Sia A un anello unitario e sia $a \in A$. Diremo che a è idempotente se $a^2 = a$.

(A) Dimostrare che un idempotente non banale (quindi $\neq 0_A, 1_A$) di A è un divisore di 0_A.
(B) Determinare due elementi idempotenti non banali in $\mathfrak{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (matrici 2×2 a coefficienti reali).

Esercizio 9.4. Sia A un anello commutativo unitario. Dato un insieme $S \subseteq A$ definiamo l'annullatore dell'insieme S come segue:

$$\mathscr{A}(S) = \{a \in A \mid a \cdot s = 0_A, \forall s \in S\}$$

(A) Dimostrare che si tratta di un ideale di A. Dimostrare che $\mathscr{A}(J) \cap J = \{0_A\}$. [*Suggerimento. Sfruttare il fatto che in un anello lo zero è unico.*]
(B) Sia $J \subseteq A$ un ideale. Dimostrare che se I è un ideale e $I \cap J = \{0_A\}$, allora $I \subseteq \mathscr{A}(J)$.
(C) Dimostrare che se I e J sono due ideali propri di A tali che $I \cap J = \{0_A\}$ ed I (o J) non contiene elementi idempotenti non banali (ovvero $\neq 1_A$) allora $I + J$ è un ideale proprio di A. [*Suggerimento. Supponete per assurdo che* $1_A \in I + J$.]

ESERCIZI PER CASA

Esercizio 9. 5. Consideriamo $C^0([-1,1],\mathbb{R})$, l'insieme delle funzioni continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Mostrare che si tratta di un anello rispetto alle operazioni:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \qquad (f\bullet g)(x)=\frac{f(x)\cdot g(-x)+f(-x)\cdot g(x)}{2}.$$

(A) È un anello unitario? È commutativo?
(B) In restrizione all'insieme delle funzioni pari determinare l'insieme degli elementi invertibili.
(C) Dimostrare che il sottoanello delle funzioni pari è un ideale. Dimostrare che la funzione c_1 data da $c_1(x)\equiv 1$ è un'unità in restrizione a tale ideale.
(D) Sia $f\in C^0([-1,1],\mathbb{R})$ mostrare che $f\bullet f=0$ se e solo se

$$([-1,1]\setminus \mathrm{supp}(f))\cup([-1,1]\setminus\{x\in[-1,1]\mid -x\in\mathrm{supp}(f)\})=[-1,1]$$

(E) Dimostrare che l'insieme $\mathcal{C}_0=\{f\in C^0([-1,1],\mathbb{R})\mid f(0)=0\}$ è un ideale (bilatero) di $C^0([-1,1],\mathbb{R})$.

Esercizio 9.6. Calcolare l'MCD delle seguenti coppie di polinomi in $\mathbb{Z}[X]$:
(a) $P(X)=X^3+X^2-2X-2$ e $Q(X)=X^3+X^2-4X-4$.
(b) $P(X)=X^4-4$ e $Q(X)=3X^{10}-6X^8$
(c) $P(X)=X^{14}+X^{13}-X^{12}-X^{11}$ e $Q(X)=2X^4-X^3-3X^2+X+1$

Esercizio 9. 7. Sia $K[X_1,..,X_n]$ l'anello dei polinomi in n-variabili sul campo K. Denoteremo con K^n lo spazio vettoriale n-dimensionale sul campo K e denoteremo con $S\subseteq K^n$ un suo sottoinsieme. Sia $J\subseteq K[X_1,..,X_n]$ un ideale di $K[X_1,...,X_n]$. Definiamo:

$$\mathcal{I}(S)=\{P\in K[X_1,...,X_n]\mid P(y_1,..,y_n)=0_K \text{ per ogni } (y_1,..,y_n)\in S\}$$
$$\mathcal{V}(J)=\{(y_1,..,y_n)\mid P(y_1,..,y_n)=0_K \text{ per ogni } P\in J\}$$

(A) Dimostrare che $\mathcal{I}(S)$ è un ideale di $K[X_1,...,X_n]$.
(B) Dimostrare che dati due ideali $J_1,J_2\subseteq K[X_1,..,X_n]$ si ha $\mathcal{V}(J_1\cap J_2)=\mathcal{V}(J_1)\cup\mathcal{V}(J_2)$.
[*Suggerimento. Un'inclusione è facile. La seconda si ottiene ragionando per assurdo*]
(C) Dimostrare che dati due ideali $J_1,J_2\subseteq K[X_1,..,X_n]$ si ha $\mathcal{V}(J_1+J_2)=\mathcal{V}(J_1)\cap\mathcal{V}(J_2)$.