A.A. 2015-2016. CORSO DI ALGEBRA 1.
PROFF. P. PIAZZA, E. SPINELLI.
ESERCITAZIONI. FOGLIO 7.

Esercizio 7.1. Determinare l'insieme degli omomorfismi da $\mathbb{Z}_{149}$ a $\mathbb{Z}_{27}$.

Esercizio 7.2. Sia $Pr_6 \subset \mathbb{E}^3$ un prisma retto di altezza 1 e con base esagonale regolare inscritta in una circonferenza di raggio 1 centrata nel punto $(0, 0, -\frac{1}{2})$; supponiamo che le due basi del prisma siano parallele al piano xy e che il segmento che collega il baricentro delle due basi esagonali sia $\{(0, 0, z) \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$.
Sia Σ_{Pr_6} il gruppo delle isometrie di $\mathbb{E}^3$ che fissano Pr_6.
(A) Esplicitare un omomorfismo $\varphi : \Sigma_{Pr_6} \to D_6$, dove D_6 è il gruppo diedrale per $n = 6$.
(B) Determinare Σ_{Pr_6}.
(C) Determinare il centro del gruppo Σ_{Pr_6}.

Esercizio 7.3. Sia K il gruppo di Klein. Individuare quali gruppi di ordine 8 contengono K e quali contengono un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}_4$.

Esercizio 7.4. Sia S_n il gruppo simmetrico su n elementi.
(A) Sia $H < S_n$. Mostrare che H è normale se e soltanto se per ogni trasposizione $(i\,j) \in S_n$ risulta

$$(i\,j)\,H\,(i\,j) = H$$

(B) Sia K il gruppo di Klein. Determinare un omomorfismo iniettivo $\varphi : K \to S_4$. [*Suggerimento. Ragionare sull'ordine degli elementi di K*]
(C) Dimostrare che $\varphi(K)$ è un sottogruppo normale. [*Suggerimento. Utilizzare il punto* (A)]

Esercizio 7.5. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo finito.
(A) Sia g un elemento di G. Verificare che la formula $\iota_g(h) = g\,h\,g^{-1}$ definisce un automorfismo del gruppo G. [*Nota.* Gli automorfismi di questo tipo sono detti "automorfismi interni"]
(B) Verificare che l'applicazione $\mathcal{I}_G : G \to Aut(G)$, $\mathcal{I}_G : g \mapsto \iota_g$, dove $\iota_g(h) = g\,h\,g^{-1}$, è un omomorfismo di gruppi il cui nucleo è il centro del gruppo G.
(C) Sia $\varphi \in Aut(G)$. Trovare un' espressione per $\varphi \circ \iota_g \circ \varphi^{-1}$ come automorfismo interno; dedurre che $Out(G) = Aut(G)/\mathcal{I}_G(G)$ è un gruppo. [*Nota.* Tale gruppo è noto come gruppo degli "automorfismi esterni" del gruppo G]
(D) Esibire una coppia (φ, G) dove G è un gruppo finito e φ è un automorfismo di G tale che $\pi(\varphi) \neq \mathrm{Id}_{Out(G)}$ dove $\pi : Aut(G) \to Aut(G)/\mathcal{I}_G(G)$ è l'omomorfismo dato dal passaggio al quoziente.
(E) Determinare il gruppo degli automorfismi interni del gruppo delle unità dei quaternioni, Q, e del gruppo simmetrico su 3 elementi S_3.