A.A. 2015-2016. CORSO DI ALGEBRA 1.
PROFF. P. PIAZZA, E. SPINELLI.
ESERCITAZIONI. FOGLIO 6.

Esercizio 6.1. Studiare la compatibilità e risolvere quando possibile il seguente sistema di equazioni congruenziali lineari al variare di $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} 22\,(X+k) \equiv 2 \quad (mod\,17) \\ 4\,X \equiv 3k \quad (mod\,11) \\ k\,X \equiv 2 \quad (mod\,5) \end{cases}$$

Esercizio 6.2. Consideriamo $\mathbb{Z}_{15}$ e consideriamo l'insieme degli invertibili $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15})$.
(A) Determinare $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15})$.
(B) Per ciascun elemento di $g \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15})$ calcolare g^{1347}.

Esercizio 6.3. Denotiamo con i l'unità immaginaria di $\mathbb{C}$. Consideriamo le seguenti matrici:

$$\pm\underline{1} = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \pm\underline{i} = \pm\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \; ; \; \pm\underline{j} = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \pm\underline{k} = \pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(A) Verificare che l'insieme $Q = \{\pm\underline{1}, \pm\underline{i}, \pm\underline{j}, \pm\underline{k}\}$ ha una struttura di gruppo rispetto all'usuale prodotto tra matrici a coefficienti complessi. A tal scopo scrivere una tabella moltiplicativa che descriva l'operazione di prodotto su Q.
(B) Determinare tutti i sottogruppi di Q. Stabilire se vi sono sottogruppi normali ed in caso esibirli. Determinare il centro del gruppo Q.
(C) Denotiamo con $\mathcal{Z}(Q)$ il centro del gruppo Q. Descrivere il gruppo quoziente $Q/\mathcal{Z}(Q)$ scrivendone una tavola moltiplicativa.
(D) Descrivere tutti gli omomorfismi da Q in $\mathbb{Z}_4$.

Esercizio 6. 4. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo <u>abeliano</u> di cardinalità $n < +\infty$ e siano $1_G = g_1, g_2, \ldots, g_n$ gli elementi di G. Senza fare uso del Teorema di Lagrange, ma utilizzando la definizione di gruppo abeliano:
(A) Mostrare che $g_1^2 \cdots g_n^2 = 1_G$.
(B) Mostrare che $g^n = 1_G$ per ogni $g \in G$. (*Suggerimento. Osservare che per ogni fissato* $h \in G$ *l'applicazione* $L_h : G \to G$, $L_h : g \mapsto h \cdot g$ *è biiettiva*)
(C) Utilizzando l'Esercizio 3.6 del Foglio 3, osservare che l'ordine di un elemento[1] $g \in G$ divide $|\,G\,| = n$. Se non si è svolto l'Esercizio precedentemente citato dimostrare che l'ordine di un elemento $g \in G$ divide ogni numero k tale che $g^k = 1_G$.

[1] Ricordiamo che l'ordine di un elemento $g \in G$ è il più piccolo intero positivo k tale che $g^k = 1_G$.

ESERCIZI PER CASA

Esercizio 6.5. Consideriamo il seguente insieme di applicazioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}) = \{x \mapsto a\,x + b \mid a,\, b \in \mathbb{R}\}$$

(A) Mostrare che tale insieme è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni (denoteremo con $\circ$ l'operazione di composizione).
(B) Sia $T_y \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ la traslazione di y, ovvero l'applicazione definita da $T_y : x \mapsto x + y$. Mostrare che il sottoinsieme delle traslazioni $\mathcal{T}_{\mathbb{R}} = \{T_y \mid y \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo normale di $\mathcal{A}(\mathbb{R})$.
(C) Mostrare che $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathcal{A}(\mathbb{R}), \circ)$, $\varphi : y \mapsto T_y$ dove $T_y(x) = x + y$ è un omomorfismo iniettivo.
(D) Determinare il sottoinsieme $\mathcal{A}^+$ delle applicazioni in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ che manda $\mathbb{R}_+$ in sé biettivamente. Mostrare che si tratta di un sottogruppo di $(\mathcal{A}(\mathbb{R}), \circ)$.
(E) Mostrare che esiste una mappa $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ed un isomorfismo $\varphi : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ tale che, se $g \in \mathcal{A}^+$ (e dunque $\varphi(g) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$) $(\varphi(g) \circ F)(x) = (F \circ g)(x)$.

Esercizio 6.6. Consideriamo $\mathbb{N}$. Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{B}_1 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(0) = 0,\ f \text{ è biettiva e } |f(k) - k| \leq 1\}$$

(A) Sia $k \geq 2$. Mostrare che se $f(k) = k - 1$ allora $f(k-1) = k$.
(B) Siano n e k tali che $f(n) = n$ e $k \in \mathbb{N}$ è il primo intero positivo per cui $f(n+k) = n+k$. Allora $k - 1 = 2m$ è pari e per ogni $i = 1, .., m$ risulta che $(f(n+2i-1), f(n+2i)) = (n+2i, n+2i-1)$.
(C) Dedurre da (B) che ogni elemento di $\mathcal{B}_1$ è tale che $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
(D) Osservare che per ogni $k \in \mathbb{N}^*$ la trasformazione T_k definita come $T_k(m) = m$ se $m \neq \{2k-1, 2k\}$ e $T_k(2k-1) = 2k,\ T_k(2k) = 2k-1$ è nell'insieme $\mathcal{B}_1$. Verificare che le trasformazioni ottenute come composizione eventualmente numerabile delle applicazioni T_k è ancora in $\mathcal{B}_1$. Dedurre che la cardinalità di $\mathcal{B}_1$ è $|\mathbb{R}|$.

Esercizio 6.7. Stabilire la compatibilità ed eventualmente risolvere il seguente sistema di equazioni congruenziali lineari:

$$\begin{cases} 24\,X \equiv 6 \quad (mod\ 46) \\ 9\,X \equiv 42 \quad (mod\ 21) \\ 13^{2347}\,X \equiv 2 \quad (mod\ 15) \end{cases}$$

Esercizio 6.8. Consideriamo l'anello degli interi modulo 26.
(A) Determinare $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{26})$.
(B) Stabilire se si tratta di un gruppo ciclico.
(C) Esibire un sottogruppo ciclico di ordine 4.

Esercizio 6.9. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale. Sia $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 1$. Consideriamo la seguente relazione:

$$x\,\rho\,y \ \Leftrightarrow\ x = a^k \cdot y \text{ per un opportuno } k \in \mathbb{Z}$$

(A) Mostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
(B) Esibire un modello dello spazio quoziente $\mathbb{R}/\rho$.
(C) Costruire, a partire da due funzioni $f_1,\ f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f_i(x + k\log(a)) = f_i(x)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia costante sulle classi di equivalenza.
(D) Determinare una applicazione $\overline{g} : A/\rho \to \mathbb{R}$ tale che $g = \overline{g} \circ \pi$ dove $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\rho$ è la proiezione al quoziente.