A.A. 2015-2016. CORSO DI ALGEBRA 1.
PROFF. P. PIAZZA, E. SPINELLI.
ESERCITAZIONI. FOGLIO 1.

Esercizio 1.1. Consideriamo $g : \mathbb{Z}^2 \setminus \{(m,0) \mid m \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Q}$, $g(m,n) = \frac{m}{n}$

(a) Verificare che l'applicazione g è suriettiva ma non iniettiva.

(b) Per ogni $q \in \mathbb{Q}$ determinare $g^{-1}(q)$.

Consideriamo ora la seguente applicazione:

$$f : \mathbb{Z}^2 \setminus \{(m,0) \mid m \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, \qquad f(m,n) = \Big(m - n\,,\, \frac{m}{n}\Big)$$

(a) Osservare che tale applicazione non è iniettiva né suriettiva.

(b) Individuare una condizione necessaria e sufficiente affinché la preimmagine tramite f di un elemento $(z\,,\,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ sia non vuota.

Esercizio 1.2. Date $f : A \to B$ e $g : B \to C$, quali di queste affermazioni sono vere? Perché?

- f e $g \circ f$ iniettive $\Rightarrow g$ iniettiva.
- g e $g \circ f$ iniettive $\Rightarrow f$ iniettiva.
- f e $g \circ f$ suriettive $\Rightarrow g$ suriettiva.
- g e $g \circ f$ suriettive $\Rightarrow f$ suriettiva.
- f e g iniettive $\Rightarrow g \circ f$ iniettiva.
- f e g suriettive $\Rightarrow g \circ f$ suriettiva.

Esercizio 1.3. Siano ρ_1 e ρ_2 due relazioni di equivalenza su un insieme A. Verificare che la relazione

$$a\,(\rho_1 \cap \rho_2)\,b \qquad \Leftrightarrow \qquad a\rho_1 b \;\; e \;\; a\rho_2 b$$

è una relazione di equivalenza su A. Siano $\{A_i^1\}_{i\in I}$ e $\{A_j^2\}_{j\in J}$ le partizioni di A nelle classi di equivalenza associate a ρ_1 e ρ_2 rispettivamente. Descrivere le classi di equivalenza di $(\rho_1 \cap \rho_2)$ in termini di tali partizioni.

Esercizio 1.4. Sia ρ una relazione di equivalenza su un insieme finito A. Denotiamo con $[a]_\rho$ la classe di equivalenza di a rispetto alla relazione ρ. Definiamo la seguente relazione:

$$a\sigma b \qquad \Leftrightarrow \qquad b = a \quad \text{oppure} \quad \{[a]_\rho \neq [b]_\rho \quad \text{e} \quad |[a]_\rho| \leq |[b]_\rho|\}$$

Mostrare che σ definisce una relazione d'ordine su A se e soltanto se le classi di equivalenza di ρ hanno cardinalità a due a due distinte. Mostrare che σ definisce una relazione d'ordine totale se e soltanto se A contiene un solo elemento.

ESERCIZI PER CASA

Esercizio 1. 5. Sia $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$. Siano (r, ϑ) le coordinate polari su $\mathbb{C}$. Consideriamo la seguente funzione a valori reali su D^2:

$$f_p : D^2 \to [-1,1], \qquad f_p(z) = f_p(r \cdot e^{i\vartheta}) = r \cdot \sin(p\,\vartheta)$$

(A) Sia ρ_p la relazione su D^2 così definita:

$$z_1 \rho_p z_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad z_2 = e^{i\,2\pi\,\frac{k}{p}} \cdot z_1 \;\text{ per qualche }\; 0 \le k < p$$

Mostrare che ρ_p è una relazione di equivalenza.

(B) Sia ρ_{f_p} la relazione su D^2 definita da

$$z_1 \rho_{f_p} z_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad f_p(z_1) = f_p(z_2)$$

Far vedere che ρ_p è strettamente contenuta in ρ_{f_p}.

(C) Determinare D^2/ρ_p ed una funzione $F_p : D^2/\rho_p \to [-1,1]$ tale che $f_p = F_p \circ \pi_{\rho_p}$, dove $\pi_{\rho_p} : D^2 \to D^2/\rho_p$ è la proiezione al quoziente. Notare che una tale F_p esiste in virtù del punto (B) e del *Teorema fondamentale delle applicazioni.*

Esercizio 1.6. Un sottoinsieme $C \subset \mathbb{R}^2$ è convesso se dati due punti $p_1, p_2 \in C$ il segmento che ha per estremi tali punti, $\{(1-t)p_1 + tp_2 \mid t \in [0,1]\}$, è anch'esso contenuto in C. Consideriamo la collezione $\mathcal{C}_0$ dei sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^2$ contenenti il punto $\underline{0} = (0,0)$.

(A) Verificare che l'intersezione di due insiemi convessi è convessa.

(B) Consideriamo la seguente relazione su $\mathcal{C}_0$:

$$C_1 \le C_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad C_2 \subseteq C_1$$

Mostrare che si tratta di una relazione d'ordine. E' una relazione di ordine totale?

(C) Sia $\overline{B}(\underline{0}, R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \le R\}$. Esibire un maggiorante della catena

$$\overline{B}(\underline{0}, 1) \le \overline{B}(\underline{0}, \frac{1}{2}) \le \cdots \le \overline{B}(\underline{0}, \frac{1}{2^k}) \le \cdots$$

Esercizio 1. 7. Sia $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}^2}$ l'insieme dei convessi di $\mathbb{R}^2$ la cui intersezione con il sottoinsieme $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ è non vuota ed ha cardinalità 1. Considerare la seguente relazione su $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}^2}$:

$$C_1\,\rho\,C_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad C_1 \cap \mathbb{Z}^2 = C_2 \cap \mathbb{Z}^2$$

Verificare che è una relazione di equivalenza. Determinare l'insieme quoziente $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}^2}/\rho$ attraverso la scelta di opportuni rappresentanti nelle classi di equivalenza.