A.A. 2015-2016. CORSO DI ALGEBRA 1.
PROFF. P. PIAZZA, E. SPINELLI.
ESERCITAZIONI. FOGLIO 11.

Esercizio 11.1. Sia $\mathbb{K}$ un campo, $I = (P) \subseteq \mathbb{K}[X]$ un ideale.

(A) Dimostrare che $Q + (P)$ è uno zero-divisore in $\mathbb{K}[X]/(P)$ se e soltanto se $\mathrm{MCD}(Q, P) \neq 1$.
(B) Dimostrare che $Q + (P)$ è nilpotente se e solo se ogni fattore irriducibile della fattorizzazione di P compare nella fattorizzazione di Q con grado non nullo.

Esercizio 11.2. Consideriamo $\mathbb{R}[X]$. Sia $I = (P, Q)$ dove

$$P(X) = X^5 + 3\,X^4 - 41\,X^3 - 63\,X^2 + 256\,X + 420\,; \quad Q(X) = X^4 + 4\,X^3 - 5\,X^2 - 36\,X - 36\,.$$

(A) Trovare un polinomio D che genera l'ideale I.
(B) Descrivere gli elementi nilpotenti e gli zero-divisori di $\mathbb{R}[X]/(D)$.

Esercizio 11.3. Si consideri $\mathbb{Z}_{15}[X]$. Trovare un polinomio di grado 2 con 4 radici distinte in $\mathbb{Z}_{15}$.

Esercizio 11. 4. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Dimostrare che in $\mathbb{K}[X]$ risulta $P(X) \equiv P(a) \bmod((X - a))$. E' ancora vero in $\mathbb{Z}_n[X]$?

Esercizio 11. 5. Siano $\mathbb{Z}[i]$ gli interi di Gauss. Determinare un elemento $a + i\,b \in \mathbb{Z}[i]$ tale che $(a + i\,b) = (5\,, -1 + 3\,i)$. Stesso esercizio per $(6\,i, 1 + 5\,i)$ [*Suggerimento. Si sfrutti la nozione di valutazione sull'anello degli interi di Gauss e la divisione col resto*]

Definizione. Diremo che un anello A è *booleano* se $a^2 = a$ per ogni $a \in A$.

Esercizio 11.6. [1] Sia A un anello booleano.

(A) Mostrare che $(a + a) = 0_A$, per ogni $a \in A$.
(B) Dimostrare che ogni ideale finitamente generato è un ideale principale. [*Suggerimento. Ragionare per induzione.*]

[1] Tratto da un foglio di esercizi della Prof.ssa P. Gianni, Università di Pisa.

ESERCIZI PER CASA

Esercizio 11. 7. Sfruttando il teorema di corrispondenza fra gli ideali di un anello A contenenti un ideale I e gli ideali di A/I mostrare che A/I è un campo se e soltanto se I è massimale.
Provare che $\mathbb{Z}[i][X]$ non è un PID.

Esercizio 11.8. [2] Consideriamo l'anello di polinomi $\mathbb{R}[X]$.

(A) Siano $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tre polinomi non costanti tali che

$$\mathrm{MCD}(P, Q) = \mathrm{MCD}(P, R) = \mathrm{MCD}(Q, R) = 1\,.$$

Dimostrare che se

$$(\dagger) \quad P^n + Q^n = R^n$$

allora valgono le seguenti:

$$\begin{array}{l} R^{n-1} \mid (P\,Q' - Q\,P') \\ P^{n-1} \mid (Q\,R' - R\,Q') \\ Q^{n-1} \;\; (P\,R' - R\,P') \end{array}$$

[*Suggerimento. Moltiplicare per opportuni polinomi e poi sottrarre tra di loro la relazione* (†) *e quella che si ottiene derivando tale relazione*]
(B) Sotto le stesse ipotesi del punto precedente dimostrare che la relazione $P^n + Q^n = R^n$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}[X]$ per $n > 2$. [*Suggerimento. Sfruttare quanto dimostrato in* (A) *e ragionare sui gradi*]

[2] Tratto da *A Concrete Introduction to Higher Algebra* di L. Childs.