ALGEBRA 1 PB-Z
I. 9 III 2012

Esercizio 1. Siano dati gli insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, d\}$. Si considerino le relazioni R su A e S su B definite da

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c)\} \quad S = \{(b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (d, d)\}$$

Determinare $R \circ S$ e $S \circ R$.

Soluzione. $R \circ S = \{(c, c)\}$, $S \circ R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c)\}$.

Esercizio 2. Sull'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$ siano R_1 e R_2 le relazioni così definite:

$$R_1 = \{(a, a), (a, c), (a, e), (b, c), (d, e)\} \quad R_2 = \{(a, d), (b, c), (b, d), (d, d)\}$$

Determinare $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ e $R_2 \circ R_1$.

Soluzione. $R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (d, d), (d, e)\}$
$R_1 \cap R_2 = \{(b, c)\}$, $R_2 \circ R_1 = \{(a, d)\}$.

Esercizio 3. Sia $A \neq \emptyset$ un insieme e R_1, ..., R_n relazioni su A. Dimostrare che

$$(R_1 \cap ... \cap R_n)^{-1} = R_1^{-1} \cap ... \cap R_n^{-1}.$$

Soluzione. Per ogni $a_1, a_2 \in A$ risulta

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2) \in (R_1 \cap ... \cap R_n)^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad (a_2, a_1) \in R_1 \cap ... \cap R_n \\
&\Leftrightarrow \quad (a_2, a_1) \in R_i \ \forall i \in \{1, ..., n\} \\
&\Leftrightarrow \quad (a_1, a_2) \in R_i^{-1} \ \forall i \in \{1, ..., n\} \\
&\Leftrightarrow \quad (a_1, a_2) \in R_1^{-1} \cap ... \cap R_n^{-1}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. Siano R_1 e R_2 relazioni sull'insieme A. Dimostrare che se ambedue R_1 e R_2 sono di equivalenza, allora $R_1 \cap R_2$ è pure di equivalenza.

Soluzione. Mostriamo che $R_1 \cap R_2$ è riflessiva, cioè che $\forall a \in A$ risulta $(a,a) \in R_1 \cap R_2$. A tal fine, basta osservare che, essendo di equivalenza, entrambe R_1 e R_2 sono, in particolare, riflessive; questo, infatti, significa che $\forall a \in A$, $(a,a) \in R_1$ e $\forall a \in A$, $(a,a) \in R_2$, ossia $\forall a \in A$, $(a,a) \in R_1$ e $(a,a) \in R_1$, che equivale a dire $\forall a \in A$ risulta $(a,a) \in R_1 \cap R_2$.

A questo punto osserviamo che $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$; infatti per ogni $a \in A$ $R_1 \cap R_2$ contiene la coppia (a,a).

Mostriamo che $R_1 \cap R_2$ è simmetrica, cioè che $(a_1,a_2) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a_2,a_1) \in R_1 \cap R_2$. A tal fine, osserviamo che entrambe R_1 e R_2 sono simmetriche (i.e. $(a_1,a_2) \in R_i \Rightarrow (a_2,a_1) \in R_i$, $i = 1,2$), essendo di equivalenza. Quindi

$$\begin{aligned}(a_1,a_2) \in R_1 \cap R_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (a_1,a_2) \in R_1 \text{ e } (a_1,a_2) \in R_2 \\ &\Rightarrow \quad (a_2,a_1) \in R_1 \text{ e } (a_2,a_1) \in R_2 \\ &\Leftrightarrow \quad (a_2,a_1) \in R_1 \cap R_2.\end{aligned}$$

Mostriamo che $R_1 \cap R_2$ è transitiva, cioè che $(a_1,a_2),(a_2,a_3) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a_1,a_3) \in R_1 \cap R_2$. A tal fine, osserviamo che, essendo di equivalenza, entrambe R_1 e R_2 sono transitive (i.e. $(a_1,a_2),(a_2,a_3) \in R_i \Rightarrow (a_1,a_3) \in R_i$, $i = 1,2$). Quindi

$$\begin{aligned}(a_1,a_2),(a_2,a_3) \in R_1 \cap R_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (a_1,a_2),(a_2,a_3) \in R_1 \text{ e } (a_1,a_2),(a_2,a_3) \in R_2 \\ &\Rightarrow \quad (a_1,a_3) \in R_1 \text{ e } (a_1,a_3) \in R_2 \\ &\Leftrightarrow \quad (a_1,a_3) \in R_1 \cap R_2.\end{aligned}$$

Esercizio 5. In generale l'unione di due relazioni di equivalenza **non** è di equivalenza: si esibisca un esempio.

Soluzione. Sull'insieme $A = \{a,b,c\}$ si considerino le relazioni $R_1 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$ e $R_2 = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$. Come è facile verificare, entrambe R_1 e R_2 sono di equivalenza.

L'unione di R_1 e R_2 è presto descritta:

$$R_1 \cup R_2 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$$

Quindi $R_1 \cup R_2$ non è di equivalenza, perché, per esempio, $(a,c) \notin R_1 \cup R_2$ nonostante entrambi (a,b) e (b,c) appartengano in $R_1 \cup R_2$.

Esercizio 6. Sull'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si consideri la relazione R così definita:

$$(a,b) \in R \;\Leftrightarrow\; a + b = 2$$

Descrivere R e dire se è vuota, riflessiva, simmetrica, transitiva.

Soluzione. L'equazione $a + b = 2$ ammette in $\mathbb{N}$ le seguenti soluzioni

$$\begin{aligned} a &= 0, \quad b = 2; \\ a &= 1, \quad b = 1; \\ a &= 2, \quad b = 0. \end{aligned}$$

Per tanto $R = \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\}$.

In particolare, R è non vuota.

Inoltre R non è riflessiva, essendo falsa l'affermazione " $\forall n \in \mathbb{N},\ (n, n) \in R$ ", 'ché, per esempio, $(13, 13) \notin R$, essendo $13 + 13 = 26 \neq 2$.

D'altra parte R è simmetrica, essendo vera l'affermazione " $(a_1, a_2) \in R \Rightarrow (a_2, a_1) \in R$ ".

Infine R non è transitiva, 'ché, per esempio, $(0, 0) \notin R$ nonostante $(0, 2), (2, 0) \in R$.

Esercizio 7. Siano $M = \{m, a, r, i\}$ e $O = \{o, n, d, e\}$ due insiemi.

- Costruire un'applicazione **non** suriettiva $A : M \to O$ e la si decomponga secondo il teorema fondamentale delle applicazioni.
- Descrivere la partizione di M indotta dall'applicazione $U : M \to O$ definita da $\forall x \in M,\ U(x) = o$.

Soluzione. Un'applicazione non suriettiva $A : M \to O$ è, ad esempio,

$$\begin{array}{rccc} A: & M & \to & O \\ & m & \mapsto & o \\ & a & \mapsto & o \\ & r & \mapsto & e \\ & i & \mapsto & d \end{array}$$

La relazione di equivalenza indotta a A è

$$R_A = \{\ (m, m), (m, a), (a, m), (a, a), (r, r), (i, i)\ \}.$$

La partizione di M indotta da A è

$$P_A = \{\{m, a\}, \{r\}, \{i\}\} \subset \wp(M).$$

L'insieme quoziente M/R_A può essere descritto come segue:

$$M/R_A = \{\ \mathbf{m},\ \mathbf{i},\ \mathbf{r}\ \},$$

essendo $\mathbf{m} = \{m, a\}$, $\mathbf{i} = \{r\}$, $\mathbf{r} = \{r\}$.

La proiezione canonica $\pi_A : M \to M/R_A$ associa $\mathbf{m}$ a m e a, $\mathbf{i}$ a i e $\mathbf{r}$ a r.

L'immagine di A è $\mathrm{Im}(A) = \{o,\ d,\ e\}$ e l'applicazione $\tilde{A} : M/R_A \to \mathrm{Im}(A)$ indotta da A è tale da associare o a $\mathbf{m}$, d a $\mathbf{i}$, e a $\mathbf{r}$.

Denotata con $\iota_A : \mathrm{Im}(A) \to O$ l'inclusione, risulta

$$A = \iota_A \circ \tilde{A} \circ \pi_A.$$

Essendo costante, la relazione di equivalenza R_U che l'applicazione $U : M \to O$ induce su M coincide con quella **totale**, cioè $R_U = M \times M$, ossia, più esplicitamente,

$$\begin{aligned} R_U &= \{(m,m),(m,a),(m,r),(m,i),(a,m),(a,a),(a,r),(a,i),\\ &\quad (r,m),(r,a),(r,r),(r,i),(i,m),(i,a),(i,r),(i,i)\}. \end{aligned}$$

Pertanto la partizione $P_U \subset \wp(M)$ indotta da U è

$$P_U = \{M\} \subset \wp(M).$$

Esercizio 8. Siano A, B insiemi. Dimostrare che $|A \times B| = |B \times A|$.

Soluzione. Per dimostrare l'asserto, basta mostrare che esiste (almeno) una biezione tra $A \times B$ e $B \times A$. A tal fine si consideri l'applicazione $\iota : A \times B \to B \times A$ che ad ogni $(a, b) \in A \times B$ associa $\iota(a, b) = (b, a)$. L'applicazione ι è evidentemente biunivoca, la sua inversa essendo l'applicazione $\upsilon : B \times A \to A \times B$ che ad ogni $(b, a) \in B \times A$ associa $\upsilon(b, a) = (a, b)$.