

ALGEBRA 1 PB-Z
XII. 8 VI 2012

Esercizio 1. Siano $a(X) \in \mathbb{Z}[X]$ il polinomio definito da

$$a(X) = 2X^3 + 3X^2 - 11X - 6$$

e A l'anello definito da

$$A = \mathbb{Z}[X]/\langle a(X) \rangle$$

Si fattorizzi $a(X)$ in $\mathbb{Z}[X]$ e si dica se A è un campo o un dominio di integrità.

Dato $e(X) = 4X^2 - 6X - 4 \in \mathbb{Z}[X]$, sia $\overline{e(X)} \in A$ la classe di equivalenza di $e(X)$ secondo la relazione indotta da A .

Si esibisca una fattorizzazione di $\overline{e(X)}$ in A e si determinino gli ideali dell'anello quoziente $A/\langle \overline{e(X)} \rangle$.

Esercizio 2. Si diagonalizzi la seguente matrice a coefficienti interi

$$\begin{pmatrix} -21 & 12 & 3 & 24 \\ -14 & 6 & -2 & 11 \\ -35 & -18 & -50 & -118 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauß si consideri l'elemento 10.

Si fattorizzi 10 in $\mathbb{Z}[i]$, si determinino gli ideali dell'anello

$$D = \mathbb{Z}[i]/\langle 10 \rangle$$

e si dica quali degli ideali di D sono primi.

Esercizio 4. Si dica se $(17, 34, 51) \in \mathbb{Z}^3$ può far parte di una base di \mathbb{Z}^3 .

Si spieghi come si è giunti alla conclusione.

Esercizio 5. Dello \mathbb{Z} -modulo \mathbb{Z}^3 si consideri il sottomodulo L definito come segue

$$L = \langle (2, 4, 6), (3, 6, 9), (15, 10, 5) \rangle \subseteq \mathbb{Z}^3$$

Si dica se L è uno \mathbb{Z} -modulo libero; in caso lo sia, si determini una base di L .

Si dica se \mathbb{Z}^3/L è uno \mathbb{Z} -modulo libero; in caso lo sia, si determini una base di \mathbb{Z}^3/L .