ESERCITAZIONE
6 giugno 2011

Esercizio 1. Risolvere il seguente sistema di congruenze nell'anello $\mathbb{Z}[i]$

$$\begin{cases} \alpha \equiv 2+i \mod (3+2i) \\ \alpha \equiv i \mod (2+i). \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia A un anello commutativo con unità.
Un A-modulo M si dice noetheriano se ogni catena crescente

$$N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_i \subset \ldots$$

di sottomoduli di M si stabilizza.
Mostrare che se M è un A-modulo noetheriano, ogni A-omomorfismo $f : M \to M$ suriettivo è anche iniettivo. *(Suggerimento: considerare i sottomoduli* $\ker(f^n)$*.)*

Esercizio 3. Dimostrare che il gruppo abeliano generato dagli elementi v_1, v_2, v_3 che soddisfano le relazioni

$$-v_1 + 5v_2 + 6v_3 = 0; \quad -2v_1 + 2v_2 - 2v_3 = 0; \quad 3v_1 - 5v_2 = 0$$

è finito. Stabilire se tale gruppo è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$.

Esercizio 4. Si consideri lo $\mathbb{Z}$-modulo libero $\mathbb{Z}^2$ e il seguente sottoinsieme:

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ 2a \equiv b \mod 3 \right\}.$$

i. Dimostrare che M è un $\mathbb{Z}$-sottomodulo di $\mathbb{Z}^2$;

ii. trovare un insieme di generatori;

iii. determinare una base (e_1, e_2) di $\mathbb{Z}^2$, e due interi d_1, $d_2 \in \mathbb{Z}$ con $d_1|d_2$, tali che (d_1e_1, d_2e_2) sia una base di M.

Esercizio 5. Sia V un modulo sull'anello dei polinomi $\mathbb{Q}[t]$. Come modulo, è generato dagli elementi v_1 e v_2, soggetti alle relazioni

$$(1-t^3)v_1 + tv_2 = 0,$$
$$(1-t^3)v_2 = 0.$$

i. Dimostrare che questo modulo può essere generato da un singolo generatore $v_0 \in V$;

ii. dare un esempio di relazione che soddisfa le proprietà simmetrica e transitiva ma non riflessiva;

iii. trovare, rispetto ad un'opportuna base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$, la matrice per la trasformazione lineare $T : V \to V$ data da $T(v) = tv$.

Esercizio 6. Stabilire, motivando la risposta, quali tra le seguenti matrici presentano moduli isomorfi su $\mathbb{R}[x]$

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ x^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$