ESERCITAZIONE
6 giugno 2011

Esercizio 1. Si determini la decomposizione in fattori irriducibili del polinomio

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 9x - 12 \in K[x]$$

quando $K = \mathbb{Q}$ o $K = \mathbb{Z}_2$ o $K = \mathbb{Z}_7$.
Dire in quali di questi tre casi $K[x]/(f(x))$ sia un dominio d'integrità, sia un campo, possieda elementi nilpotenti diversi da 0.

Esercizio 2. Dire per quali valori di $p \in \mathbb{Z}$ primo, l'ideale $(x^2 - 1, p)$ di $\mathbb{Z}[x]$ è primo e/o massimale.

Esercizio 3.

- Esibire un ideale massimale di $\mathbb{Z}[x]$ che contenga $(x^2 + 1)$.
- Esibire un ideale non massimale di $\mathbb{Z}[x]$ che contenga strettamente $(x^2 + 1)$.

Esercizio 4. Mostrare che se α, $\beta \in \mathbb{Z}[i]$, allora $MCD(\alpha, \beta)$ divide $MCD(|\alpha|^2, |\beta|^2)$. Utilizzare questo fatto per calcolare il massimo comun divisore di $8 + 7i$ e $9 + 6i$.

Esercizio 5. Si consideri in $\mathbb{Q}[x]$ l'ideale I generato dai polinomi

$$x^3 + 8x^2 + 15x + 6 \text{ e } x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 6x + 3.$$

Dimostrare che $\mathbb{Q}[x]/I$ è un campo.

Esercizio 6. Effettuare la divisione col resto di $3 + 2i$ per $2 - i$ nell'anello degli interi di Gauss.

Esercizio 7.

- Stabilire se l'anello $R = \mathbb{Z}[i]/(7 - 6i)$ è un dominio e/o un campo.
- Stabilire se $[1 + 4i] \in R$ è invertibile.