

ALGEBRA 1 PB-Z
EXTRA I. 6 IV 2012

Esercizio 1. **I.** Descrivere \mathbb{Z} / \equiv_0 e \mathbb{Z} / \equiv_1 come *insiemi*; **II.** dire se le operazioni di somma e prodotto su \mathbb{Z} inducono analoghe operazioni su \mathbb{Z} / \equiv_0 e \mathbb{Z} / \equiv_1 ; **III.** dire se \mathbb{Z} / \equiv_0 e \mathbb{Z} / \equiv_1 ammettono una struttura di gruppo additivo; **IV.** dire se \mathbb{Z} / \equiv_0 e \mathbb{Z} / \equiv_1 ammettono una struttura di anello commutativo unitario.

Esercizio 2. Sia $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$ un intero fissato. Si mostri che \mathbb{Z} / \equiv_m è un anello commutativo unitario.

Esercizio 3. Risolvere le equazioni

$$(\star_1) \quad 20X \equiv_{30} 50; \quad (\star_2) \quad 81X \equiv_{15} 6; \quad (\star_3) \quad 17X \equiv_5 1.$$

Esercizio 4. Dire se i seguenti elementi sono invertibili oppure no:

$$\bar{3} \in \mathbb{Z}_5; \quad \bar{3} \in \mathbb{Z}_6; \quad \bar{17} \in \mathbb{Z}_{26}; \quad \bar{2} \in \mathbb{Z}_{2h}; \quad \bar{2} \in \mathbb{Z}_{2h+1}.$$

Esercizio 5. Risolvere i sistemi cinesi

$$(K_1) \begin{cases} X \equiv_5 4 \\ X \equiv_6 5 \\ X \equiv_7 6 \end{cases} \quad (K_2) \begin{cases} X \equiv_5 2 \\ X \equiv_6 5 \\ X \equiv_{11} 6 \end{cases}$$

Esercizio 6. Risolvere i sistemi generali

$$(\Gamma_1) \begin{cases} 4X \equiv_{22} 2 \\ 3X \equiv_7 2 \end{cases} \quad (\Gamma_2) \begin{cases} 2X \equiv_6 2 \\ 3X \equiv_7 2 \\ 2X \equiv_8 4 \end{cases}$$

Esercizio 7. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ le ultime cifre delle espressioni in base 10 di n e di n^5 sono uguali; ossia che

$$n^5 \equiv_{10} n.$$