ALGEBRA 1 PB-Z
VII. 4 V 2012

Esercizio 1. Si determini, usando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, il massimo comun divisore in $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ dei seguenti polinomi a coefficienti razionali

$$\begin{aligned} \mathrm{S(X)} &= 9\mathrm{X}^6 - 3\mathrm{X}^5 - 18\mathrm{X}^4 + 14\mathrm{X}^2 + 12\mathrm{X} + 4 \\ \mathrm{O(X)} &= 3\mathrm{X}^4 - \mathrm{X}^3 - 6\mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} - 2 \end{aligned}$$

e il massimo comun divisore in $\mathbb{Z}_5[\mathrm{X}]$ dei seguenti polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{aligned} \mathrm{L(X)} &= \mathrm{X}^5 + \bar{1} \\ \mathrm{E(X)} &= \bar{3}\mathrm{X}^3 + \bar{2} \end{aligned}$$

Esercizio 2. Siano κ un campo e $\kappa[\mathrm{X}]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in κ.

I. Si mostri che è possibile definire su $\kappa[\mathrm{X}]$ una struttura di κ-spazio vettoriale ([1]).

II. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\kappa[\mathrm{X}]_n = \{p(\mathrm{X}) \in \kappa[\mathrm{X}] \mid \deg(p(\mathrm{X})) \leq n\}$ l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a n. Mostrare che
1. per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $\kappa[\mathrm{X}]_n$ è un sottospazio vettoriale di $\kappa[\mathrm{X}]$;
2. per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $\kappa[\mathrm{X}]_n$ non è un sottoanello di $\kappa[\mathrm{X}]$.

Esercizio 3. Siano A e I insiemi. Si assuma che A sia non vuoto e che, per ogni $i \in I$, sia definita su A un'operazione n_i-aria $\omega_i : A^{n_i} \to A$.

Sia, ora, X un qualsivoglia insieme. Si mostri che, per ogni $i \in I$, l'operazione ω_i induce sull'insieme A^X un'operazione n_i-aria $\tilde{\omega}_i : (A^X)^{n_i} \to A^X$.

Esercizio 4. Dire se i seguenti polinomi a coefficienti interi ammettono radici razionali

$$\begin{aligned} \mathrm{L(X)} &= \mathrm{X}^{57} - 2\mathrm{X}^{32} - 17 \\ \mathrm{E(X)} &= 3\mathrm{X}^8 + 55\mathrm{X}^6 + 2 \\ \mathrm{O(X)} &= \mathrm{X}^5 + 1 \end{aligned}$$

Esercizio 5. Siano κ un campo, $\kappa[\mathrm{X}]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in κ e $\kappa[\mathrm{X}]_{\mathrm{mon}} \subseteq \kappa[\mathrm{X}]$ l'insieme i cui elementi sono tutti e soli i polinomi monici di $\kappa[\mathrm{X}]$.

I. Si mostri che $\kappa[\mathrm{X}]_{\mathrm{mon}}$ non è chiuso per l'operazione di somma

II. Si mostri che $(\kappa[\mathrm{X}]_{\mathrm{mon}}, \ \cdot\ )$ è un monoide commutativo.

III. Si mostri che $(\kappa[\mathrm{X}]_{\mathrm{mon}}, \mid)$ è un insieme parzialmente ordinato e tale che: per ogni $p_1(\mathrm{X}),\ p_2(\mathrm{X}) \in \kappa[\mathrm{X}]_{\mathrm{mon}}$ esistono unici un minimo $|$-maggiorante comune e un massimo $|$-minorante comune di $p_1(\mathrm{X})$ e $p_2(\mathrm{X})$.

[1] *Sugg.:* ...trovare le operazioni di "somma" e "prodotto per uno scalare", poi verificare il soddisfacimento degli assiomi...