ALGEBRA 1 — Secondo esame scritto
18 Luglio 2011

(1) Risolvere il seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 3x \equiv 15 \mod 21 \\ 44x \equiv 20 \mod 12 \\ 6x \equiv 6^{1000} \mod 15 \end{cases}$$

(2) Si determini la cardinalità dei seguenti insiemi:
- $A = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(\sqrt{2})$ è irrazionale$\}$;
- $B = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(2)$ è razionale$\}$.

(3) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{Z}_p$, il polinomio $x^2 - 3x + a$ sia riducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$, nei casi $p = 3, 7, 11$.

(4) Vero o Falso (con dettagliate spiegazioni):
(a1) 7981 è un MCD di $3x + 1$ e $5x$ in $\mathbb{Z}[X]$
(a2) 7981 è un MCD di $3x + 1$ e $5x$ in $\mathbb{Q}[X]$
(b1) $3x$ è un MCD di $13x^2$ e x in $\mathbb{Z}[X]$
(b2) $3x$ è un MCD di $13x^2$ e x in $\mathbb{Q}[X]$
(c1) $x - 2$ è un MCD di $x^3 + 2x^2 - x - 2$ e $x^3 - 8$ in $\mathbb{Z}[X]$
(c2) $x - 2$ è un MCD di $x^3 + 2x^2 - x - 2$ e $x^3 - 8$ in $\mathbb{Q}[X]$.

(5) Nell'anello $\mathbb{Q}[x]$ si consideri l'ideale I generato da $x^7 - x^5 - x^4 + x$ e $x^5 - x$. Dire se $\mathbb{Q}[x]/I$ sia o meno un campo.