ALGEBRA 1 — Primo esame scritto
4 Luglio 2011

(1) Si trovino tutte le soluzioni intere del sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} x \equiv 4 \mod 5 \\ 2x \equiv 5 \mod 7 \\ 3x \equiv 12345^{2448} \mod 9 \end{cases}$$

(2) Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{sia } x + y\sqrt{2} \text{ che } x - y\sqrt{2} \text{ appartengono a } \mathbb{Q}\}$$

(3) Verificare che il polinomio $x^4 + x - 1$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.
Sia $\pi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]/(x^4 + x - 1)$ la proiezione canonica. Spiegare per quale motivo l'elemento $\pi(x^2 + x - 1)$ possieda un inverso in $\mathbb{Q}[x]/(x^4 + x - 1)$, e determinare tale inverso.

(4) Dire se l'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(7 + i)$
- sia un campo;
- sia un dominio d'integrità;
- possieda elementi nilpotenti diversi da [0].

(5) Sia $N \subset \mathbb{Z}^3$ lo $\mathbb{Z}$-sottomodulo generato dagli elementi $(4, 2, 2), (6, 6, 3), (5, 5, 5)$.
- Quanti elementi possiede N?
- Quanti elementi possiede $\mathbb{Z}^3/N$?