Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2015-16. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 28/5/2016

Esercizio 1. Sia D un dominio di integrità con unità e sia $Q(D)$ il suo campo dei quozienti. Sappiamo che esiste un'applicazione iniettiva $f : D \to Q(D)$ che identifica D ad un sottoanello di $Q(D)$. Verificare che se $\mathbb{K}$ è un campo ed esiste un'applicazione iniettiva g di D in $\mathbb{K}$ allora esiste un'applicazione iniettiva $G : Q(D) \to \mathbb{K}$ tale che $G \circ f = g$. Si dice che $Q(D)$ è il più piccolo campo che contiene D come sottoanello.

Esercizio 2. Verificare che si ha un isomorfismo di anelli fra $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$ e $\mathbb{Z}[i]$. Verificare più in generale che se d è un intero e d non è un quadrato allora $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$ e si ha un isomorfismo di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ con $\mathbb{Z}[X]/(X^2-d)$. Cosa possiamo dire circa il campo dei quozienti di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$?

Esercizio 3. Sia $f : R \to R'$ un omomorfismo di anelli e sia I un ideale bilatero. Sia $\pi : R \to R/I$ la proiezione canonica. Supponiamo che $I \subset \ker f$. Verificare che sotto questa ipotesi f definisce un unico omomorfismo $\overline{f} : R/I \to R'$ tale che $\overline{f} \circ \pi = f$.
Commento: abbiamo visto questo teorema nel caso dei gruppi ....

Esercizio 4.
4.1. Nell'anello $\mathbb{Z}[X]$ si consideri l'ideale $I := (3, X)$. Nel compito del giorno 21/5 abbiamo visto che $\mathbb{Z}[X]/I$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_3$. Ritrovare questo risultato applicando il secondo (per certi autori il terzo) teorema di isomorfismo, scegliendo in maniera opportuna un ideale contenuto in $(2, X)$.
4.2. Applicare un ragionamento analogo per verificare che per ogni anello commutativo unitario R si ha

$$R/(a,b) \simeq (R/(a))/([b])$$

Ad esempio: a cosa è isomorfo $\mathbb{Z}[X]/(p, X^2-1)$ con p primo ?

Esercizio 5. (esame del 3/7/2012 De Sole-Piazza-Spinelli)
5.1. Si determini per quali valori dell'intero $n \geq 1$ si ha un omomorfismo (ben definito) di anelli $f : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/n$ dato da $f(a+ib) = \overline{a+5b} \in \mathbb{Z}/n$.
5.2. Se n è come in 5.1, si verifichi che $J = \{a+ib \in \mathbb{Z}[i] \text{ tale che } n \mid a+5b\}$ è un ideale di $\mathbb{Z}[i]$. Determinare inoltre per quali valori di n tale ideale è massimale.
Possibile suggerimento: utilizzare l'esercizio 3 e l'esercizio 2.

Esercizio 6. (piccola variazione su un esercizio dell'esame del 13/7/2012 De Sole-Piazza-Spinelli)
Dati due ideali non nulli I e J dell'anello (commutativo con unità) A, si considerino gli ideali

$$IJ = \{ \sum_{\text{finita}} \iota_k j_k\,, \quad \iota_k \in I, j_k \in J\}\ ,\quad I \cap J\ ,\quad I + J = \{i + j \,|\, i \in I,\, j \in J\} \subset A\,.$$

(1) dimostrare che si ha sempre $IJ \subset I \cap J$.
(2) Dimostrare che se $I + J = A$ allora $IJ = I \cap J$.
(3) Dimostare la seguente generalizzazione del *Teorema Cinese dei Resti*: se $I + J = A$, allora

$$A/IJ \simeq A/I \times A/J\,.$$

Esercizio 7. Sia $\mathbb{K}$ un campo e consideriamo l'anello $A = \mathbb{K}[X]/(X^3)$. Determinare gli ideali di A e per ciascuno di essi determinare il corrispondente anello quoziente.

Esercizio 8. (a.a. 2010-2011, appello di Settembre, D'Andrea-Piazza) Sia $I \subset \mathbb{Z}[i]$ l'ideale generato dagli elementi $6 + 7i, 10 + 11i$. Decidere se $3 + 5i \in I$.