

**Corso di Laurea in Matematica.**  
**Algebra 1. a.a. 2015-16. Prof. P. Piazza**  
**Compito a casa del 29/4/2016**

**Esercizio 1.** Consideriamo  $\mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  ed il sottogruppo  $n\mathbb{Z}$ . Spiegare perché il gruppo quoziente  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  è ben definito ed isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$ .

**Esercizio 2.** Sia  $G = \langle g \rangle$  un gruppo ciclico di ordine  $n$ . Verificare che  $\langle g^r \rangle = \langle g^d \rangle$  con  $d := \text{MCD}(n, r)$ .

**Esercizio 3.** Dimostrare che  $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{25}), \cdot)$  è ciclico e determinarne tutti i sottogruppi.

**Esercizio 4.** Sia  $C_6$  il gruppo ciclico delle radici seste dell'unità in  $\mathbb{C}$ .

- (1) Scrivere i numeri complessi che costituiscono  $C_6$ .
- (2) Determinare i generatori di  $C_6$ .
- (3) Determinare un isomorfismo di gruppi  $\phi : \mathbb{Z}_6 \rightarrow C_6$ .

Può essere utile leggere [C] pp. 39, 40.

**Esercizio 5.** Verificare che un gruppo di ordine  $p$ , con  $p$  primo, è necessariamente ciclico.

Verificare che esistono a meno di isomorfismi solo due gruppi di ordine 4: il gruppo ciclico di ordine 4 ed il gruppo di Klein  $V_4$ .

**Esercizio 6.** Consideriamo  $\mathbb{Z}_n$ . Dimostrare che i quozienti di  $\mathbb{Z}_n$  sono isomorfi a  $\mathbb{Z}_k$  con  $k$  divisore di  $n$ . Determinare tutti i quozienti di  $\mathbb{Z}_{12}$ .

*Suggerimento: utilizzare la descrizione che abbiamo dato dei sottogruppi di  $\mathbb{Z}_n$ . Se  $H_d$ ,  $n = kd$ , è un tale sottogruppo allora  $H_d$  è nucleo di un naturale omomorfismo  $\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ . Applicare il primo teorema di isomorfismo....*

**Esercizio 7.** Descrivere tutti gli omomorfismi di  $S_3$  in  $\mathbb{Z}_6$ .

**Esercizio 8.** Verificare che il gruppo di Klein  $V_4$  è un sottogruppo del gruppo alterno su quattro elementi  $A_4$ . Verificare che  $V_4$  è normale in  $A_4$ .

**Esercizio 9.** Per le seguenti permutazioni di  $S_8$  determinare : inversa, decomposizione in cicli disgiunti, periodo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 3 & 2 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 10.** Sia  $\sigma = (13564) \in S_9$ . Sia  $\tau = (45)(842)(793) \in S_9$ . Determinare  $\tau^{-1}\alpha\tau$ . Fare lo stesso esercizio con  $\alpha = (34)(867)$  e  $\tau = (13)(76)(47)$ .

Determinare (se esiste)  $\tau \in S_9$  tale che  $\beta = \tau^{-1}\alpha\tau$  con:

$$\alpha = (4657)(98123) \quad \beta = (5746)(123)(89):$$

$$\alpha = (1357) \quad \beta = (2468)$$

Suggerimento: leggere [C] pp 156, 157.

**Esercizio 11.** Dimostrare che esiste in  $S_{30}$  un sottogruppo di ordine 209.

Suggerimento:  $209 = 11 \cdot 19$ .

**Esercizio 12.** Sia  $\mathcal{R}$  la relazione di coniugio in  $S_n$ :  $\sigma_1 \mathcal{R} \sigma_2$  se e solo se esiste  $\tau \in S_n$  tale che  $\sigma_2 = \tau^{-1} \sigma_1 \tau$ . Determinare la cardinalità dell'insieme quoziente  $S_6/\mathcal{R}$ .