Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Esercitazione in classe del 12/01/2024

Esercizio 1.
Consideriamo $V = \mathbb{R}_2[t]$, lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2, e l'applicazione $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ definita da

$$T(p)(t) := tp'(t-1)$$

con p' la derivata di p rispetto a t [1]
1. Verificare che T è lineare.
2. Determinare autovalori ed autovettori di T e stabilire se T è diagonalizzabile; in caso affermativo determinare una base diagonalizzante.
3. Si ora $a \in \mathbb{R}$ e $T_a : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ l'applicazione lineare definita da

$$T_a(p)(t) := tp'(t-a)$$

Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione T è diagonalizzabile.

Esercizio 2.
Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ con base canonica $\mathcal{E}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

fissata. Consideriamo l'applicazione $\phi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita dalla formula

$$\phi(A) := \mathrm{Tr}(A^2).$$

1. Scrivere l'espressione in coordinate di ϕ verificando in tal modo che ϕ è una forma quadratica [2].
2. Determinare la forma bilineare simmetrica b polare di ϕ.
3. Determinare la forma di Sylvester di b e quindi indici di positività, negatività e nullità di b.
4. Determinare, se esiste, un vettore isotropo per b.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}_2[X]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 con base canonica $\{1, X, X^2\}$. Sia $<\,,\,>: V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica definita da

$$< p, q >:= \int_{-1}^{1} pq dx\,.$$

$<\,,\,>$ è definita positiva e definisce quindi un prodotto scalare.
1. Determinare la matrice associata alla proiezione ortogonale P sul sottospazio $W := \mathrm{Span}(1+X) \equiv \mathbb{R}(1+X)$ nella base canonica di V.
2. **(i)** Vero o Falso: P è un operatore ortogonale rispetto a $<\,,\,>$.
(ii) Vero o Falso: P è un operatore diagonalizzabile.

---

[1] quindi $p'(t-1)$ denota la derivata di p calcolata in $(t-1)$.
[2] e cioè un polinomio omogeneo di secondo grado nelle coordinate associate ad $\mathcal{E}$