Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Esercitazione in classe del 12/01/2024

Esercizio 1. Consideriamo $V = \mathbb{R}_2[t]$, lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2, e l'applicazione $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ definita da

$$T(p)(t) := tp'(t-1)$$

con p' la derivata di p rispetto a t [1]
1. Verificare che T è lineare.
2. Determinare autovalori ed autovettori di T e stabilire se T è diagonalizzabile; in caso affermativo determinare una base diagonalizzante.
3. Si ora $a \in \mathbb{R}$ e $T_a : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ l'applicazione lineare definita da

$$T_a(p)(t) := tp'(t-a)$$

Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione T è diagonalizzabile.

Soluzione. Dato che la derivata di una somma è la somma delle derivate si ha:

$$T(p+q)(t) = t(p+q)'(t-1) = t(p'+q')(t-1) = tp'(t-1)+tq'(t-1) = T(p)(t)+T(q)(t)$$

Analogamente si procede per $T(\alpha p)$ utilizzando che $(\alpha p)' = \alpha p'$. Quindi T è lineare.
Per determinare gli autovalori di T dobbiamo scrivere la matrice associata a T in una base; scegliamo la base canonica $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$. Si ha

$$T(1) = \underline{0}\,, \quad T(t) = t\,, \quad T(t^2) = t2(t-1) = -2t + 2t^2\,.$$

Ne segue che

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Poniamo $A := M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T)$.
Ne segue che

$$\mathrm{sp}(T) = \{0, 1, 2\}$$

Avendo 3 autovalori distinti in uno spazio vettoriale di dimensione 3 T è diagonalizzabile. Capiamo subito che il polinomio 1 è un elemento del nucleo, e quindi un generatore dell'autospazio associato all'autovalore 0 e che t è un generatore per l'autospazio associato all'autovalore 1. L'autospazio associato all'autovalore 2 si ottiene calcolando $\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{Id})$ e cioè $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$; ora

$$A - 2I_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e quindi $V_T(2) \equiv \mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{Id})$ ha equazioni cartesiane nelle coordinate (x_1, x_2, x_3) associate a $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 + 2x_3 = 0$$

[1] quindi $p'(t-1)$ denota la derivata di p calcolata in $(t-1)$.

Una tripla che soddisfa questo sistema è $(0, 2, -1)$; quindi $p = 2t - t^2$ è un generatore per $V_T(2)$. Riassumendo, la base

$$\{1, t, 2t - t^2\}$$

è una base diagonalizzante per T.
Passiamo all'ultima domanda. Si ha, ragionando come sopra

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T_a) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

e quindi T_a è diagonalizzabile per ogni $a \in \mathbb{R}$ avendo tre autovalori distinti.

Esercizio 2.
Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ con base canonica $\mathcal{E}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

fissata. Consideriamo l'applicazione $\phi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita dalla formula

$$\phi(A) := \mathrm{Tr}(A^2).$$

1. Scrivere l'espressione in coordinate di ϕ verificando in tal modo che ϕ è una forma quadratica [2].
2. Determinare la forma bilineare simmetrica b polare di ϕ.
3. Determinare la forma di Sylvester di b e quindi indici di positività, negatività e nullità di b.
4. Determinare, se esiste, un vettore isotropo per b.

Soluzione. Sia

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

Ovviamente

$$A^2 = \begin{vmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{vmatrix};$$

quindi $\phi(A) := \mathrm{Tr}(A^2) = a^2 + 2bc + d^2$. La forma bilineare simmetrica polare di ϕ è

$$b(A, A') = aa' + bc' + cb' + dd'.$$

Possiamo pensare a questa forma bilineare simmetrica come ad una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^4$, utilizzando l'isomorfismo $M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ che ad A associa (a, b, c, d). L'operatore simmetrico associato a questa forma bilineare simmetrica è dato da L_A con

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Si ha $P_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2(\lambda^2 - 1)$ e quindi A ammette 3 autovalori positivi $(= 1)$ ed un autovalore negativo $(= -1)$. Ne segue, per il teorema spettrale/teorema di

[2] e cioè un polinomio omogeneo di secondo grado nelle coordinate associate ad $\mathcal{E}$

Sylvester che esiste una base $\mathcal{F}$ tale che

$$A_b^{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e quindi l'indice di positività è 3, l'indice di negatività è 1, l'indice di nullità è 0. Il vettore $(1, -1, 1, 1)$ è isotropo.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}_2[X]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 con base canonica $\{1, X, X^2\}$. Sia $<\,,\,>: V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica definita da

$$< p, q > := \int_{-1}^{1} pq dx\,.$$

$<\,,\,>$ è definita positiva e definisce quindi un prodotto scalare.
1. Determinare la matrice associata alla proiezione ortogonale P sul sottospazio $W := \text{Span}(1 + X) \equiv \mathbb{R}(1 + X)$ nella base canonica di V.
2. (i) Vero o Falso: P è un operatore ortogonale rispetto a $<\,,\,>$.
(ii) Vero o Falso: P è un operatore diagonalizzabile.

Soluzione.

1. Consideriamo $W = \mathbb{R}(1 + X)$ che ha ovviamente dimensione 1. Sappiamo che se $\{\underline{w}\}$ è una base ortonormale di W allora

$$P_W(1) =< 1, \underline{w} > \underline{w} \qquad P_W(X) =< X, \underline{w} > \underline{w} \qquad P_W(X^2) =< X^2, \underline{w} > \underline{w}.$$

Poichè $< 1 + X, 1 + X >= 8/3$ segue che una base ortonormale di W è data dal vettore $\underline{w} := \sqrt{3/8}(1 + X)$ da cui

$$P_W(1) = 3/4(1 + X) \qquad P_W(X) = 1/4(1 + X) \qquad P_W(X^2) = 1/4(1 + X).$$

Quindi la matrice della proiezione ortogonale su W nella base canonica di V, sia questa base $\mathcal{E}$, è

$$A = \begin{vmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\,.$$

L'esercizio poteva anche essere risolto con un altro metodo. Identifichiamo V a $\mathbb{R}^3$ e scriviamo l'equazione cartesiana di $W^\perp$ traducendo in coordinate la condizione

$$q \in W^\perp \text{ se e solo se } < q, (1 + X) >= 0\,.$$

Otteniamo che $W^\perp$ ha equazione $3x_1 + x_2 + x_3 = 0$. In una base $\mathcal{F}$ costituita dal vettore $(1 + X)$ e da due vettori non-proporzionale in $W^\perp$, ad esempio

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix}\,,$$

la matrice dell'operatore è

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Dalla nota formula
$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P) = M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{Id})\, M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(P)\, M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$$
e dal fatto che $M_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = (M_{\mathcal{E},\mathcal{F}})^{-1}$ riotteniamo la matrice di prima.

2. È falso che P sia ortogonale; infatti un operatore ortogonale è iniettivo e cioè non è vero per P.
È vero che P è diagonalizzabile perché per definizione di proiezione ortogonale, P ha W come autospazio associato all'autovalore 1 e $W^\perp$ come autospazio associato all'autovalore 0; inoltre si ha $V = W \oplus W^\perp$ e quindi esiste una base di V costituita da autovettori per P.