Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Esercitazione in classe del 10/01/2024

Esercizio 1. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^3$ i sottospazi dati da

$$U = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix} \right).$$

Determinare una base di $U \cap V$ (suggerimento: può essere utile passare ad equazioni cartesiane.).
Stabilire se $\mathbb{R}^3 = U + V$.
Stabilire se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Esercizio 2. Sia $u \in \mathbb{R}$ e sia $A(u)$ la matrice

$$A(u) := \begin{vmatrix} 1 & u/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & u & 1 \end{vmatrix}$$

Sia $T_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $A(u)$: $T_u := L_{A(u)}$.
1. Determinare il polinomio caratteristico di T_u e gli autovalori di T_u.
2 Verificare che T_0 è diagonalizzabile e determinare una base di autovettori.
3. Studiare la diagonalizzabilità di T_u al variare di $u \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.
In $\mathbb{R}^3$ consideriamo l'applicazione $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T A \mathbf{x}$ con

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

0. Spiegare rapidamente perché b definisce una forma bilineare simmetrica.
1. Determinare il nucleo (o radicale) di b.
2. Utilizzando opportuni vettori non-isotropi, determinare una base di Sylvester per b.
3. Determinare indici di positività, negatività e nullità di b.