

Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Esercitazione in classe del 10/01/2024. Soluzioni.

Esercizio 1. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^3$ i sottospazi dati da

$$U = \text{Span} \left(\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{array} \right) \right), \quad V = \text{Span} \left(\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{array} \right) \right).$$

Determinare una base di $U \cap V$ (suggerimento: può essere utile passare ad equazioni cartesiane.).

Stabilire se $\mathbb{R}^3 = U + V$.

Stabilire se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Soluzione: Esprimiamo U e V come soluzioni di sistemi lineari omogenei e troviamo una base di $U \cap V$ risolvendo il sistema ottenuto prendendo sia le equazioni per U che le equazioni per V .

Per trovare una base di U operiamo una riduzione di Gauss sulla matrice

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{array} \right|.$$

Scopriamo in questo modo che U ha dimensione 2 e che una base è data, ad esempio, dai primi due vettori colonna. Analogamente procediamo per V e scopriamo che V ha dimensione 2 e che una sua base è data dalle prime due colonne. Ora operiamo con Gauss su

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 2 & -2 & x_2 \\ -3 & 0 & x_3 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 7 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \end{array} \right|$$

e otteniamo

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -6 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 7 & x_1 \\ 0 & 6 & x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - x_3 \end{array} \right|$$

da cui imponendo la compatibilità deduciamo che

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \quad V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0\}.$$

Quindi $U \cap V$ è costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema troviamo che $U \cap V = \text{Span}(-7, 2, 5)$.

Da Grassmann otteniamo che $\dim(U + V) = 2 + 2 - 1 = 3$; quindi $U + V = \mathbb{R}^3$.

Ovviamente non è vero che $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$ perché $U \cap V \neq \underline{0}$

Esercizio 2. Sia $u \in \mathbb{R}$ e sia $A(u)$ la matrice

$$A(u) := \begin{vmatrix} 1 & u/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & u & 1 \end{vmatrix}$$

Sia $T_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $A(u): T_u := L_{A(u)}$.

1. Determinare il polinomio caratteristico di T_u e gli autovalori di T_u .
2. Verificare che T_0 è diagonalizzabile e determinare una base di autovettori.
3. Studiare la diagonalizzabilità di T_u al variare di $u \in \mathbb{R}$.

Soluzione: Il polinomio caratteristico di A_u è $(2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda)$ che ha radici $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica 1. Notiamo che il polinomio caratteristico non dipende da u .

Si ha

$$A(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

L'autospazio V_0 di $A(0)$ è il nucleo di $A(0)$, che è $\{\underline{x} | A(0)\underline{x} = \underline{0}\}$; lo riscriviamo come le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{x_3}{2} = 0 \\ x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Si ha (facile) $V_0 = \mathbb{R}(1, 0, -2)$. Passiamo a $V_2 = \text{Ker}(A(0) - 2I_3)$; quindi V_2 è il nucleo di

$$A(0) - 2I_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ne segue che

$$V_2 = \{\underline{x} | 2x_1 - x_3 = 0\}$$

che ha base, ad esempio, $\{(1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$. Conclusione: i tre vettori

$$\{(1, 0, -2), (1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$$

sono una base di autovettori per T_0 . In particolare T_0 è diagonalizzabile.

Passiamo allo studio della diagonalizzabilità di T_u al variare di u . Per l'autovalore λ_2 sappiamo che la molteplicità algebrica è necessariamente uguale a quella geometrica (perché $1 \leq m_g(\lambda_2)$; $m_g(\lambda_2) \leq m_a(\lambda_2) = 1$ e quindi $m_g(\lambda_2) = m_a(\lambda_2) = 1$). Possiamo quindi concentrarci sull'autovalore $\lambda_1 = 2$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$ è dato da $\text{Ker}(A_u - 2I_3)$. Ma

$$A_u - 2I_3 = \begin{vmatrix} -1 & u/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & u & -1 \end{vmatrix}$$

La dimensione dell'autospazio V_2 è quindi uguale a $3 - r_u$ con r_u uguale al rango di questa matrice. Questa dimensione è quindi uguale a 2, che è la molteplicità algebrica dell'autovalore, se e solo se r_u è uguale a 1. Tuttavia, è semplice verificare che $r_u = 1$ se e solo se $u = 0$. Quindi, la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale alla sua molteplicità geometrica se e solo se $u = 0$. La conclusione è che T_u è diagonalizzabile se e solo se $u = 0$.

Esercizio 3.

In \mathbb{R}^3 consideriamo l'applicazione $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T A \mathbf{x}$ con

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

0. Spiegare rapidamente perché b definisce una forma bilineare simmetrica.
1. Determinare il nucleo (o radicale) di b .
2. Utilizzando opportuni vettori non-isotropi, determinare una base di Sylvester per b .
3. Determinare indici di positività, negatività e nullità di b .

Soluzione.

0. La bilinearità di b segue dalle proprietà del prodotto righe per colonne. La simmetria di b segue dalla simmetria di A .

1. Sappiamo che fissata una base \mathcal{E} con coordinate associate \underline{x} , il radicale $V^{\perp b}$ ha equazioni cartesiane date da $A\underline{x} = \underline{0}$, con A la matrice associata a b nella base \mathcal{E} . In questo caso possiamo scegliere \mathcal{E} la base canonica di \mathbb{R}^3 e quindi A è proprio la matrice data. Ne segue che $V^{\perp b} = \text{Ker}A$ e quindi una base per il radicale di b è data dal vettore $(0, -2, 1)$.

2+3. Poniamo $\underline{k}_1 := (0, -2, 1)$. Vogliamo completare questa base del radicale ad una base di Sylvester per b . Scegliamo un vettore non-isotropo fuori dal radicale, ad esempio $\underline{k}_2 := (0, 1, 0)$. Si ha $b(\underline{k}_2, \underline{k}_2) = 1$. Ora scegliamo un vettore non-isotropo fuori dal radicale, \underline{k}_3 , tale che $b(\underline{k}_2, \underline{k}_3) = 0$. Lo scegliamo nei vettori b -ortogonali a \underline{k}_2 ; il sottospazio dei vettori b -ortogonali a \underline{k}_2 ha equazione $b(\underline{x}, (0, 1, 0)) = 0$ e cioè, con semplice conto, $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Il vettore $\underline{k}_3 := (1, -1, 0)$ appartiene a questo sottospazio e non è un multiplo di \underline{k}_1 ; inoltre $b((1, -1, 0), (1, -1, 0)) = -1$ è quindi $(1, -1, 0)$ è non-isotropo. I tre vettori trovati sono linearmente indipendenti (questo è di fatto automatico ma è anche verificabile direttamente) e, a meno dell'ordine, costituiscono una base di Sylvester per b . Per determinare una base di Sylvester basterà riordinare i vettori della base trovata ponendo

$$\underline{f}_1 = \underline{k}_2, \quad \underline{f}_2 = \underline{k}_3, \quad \underline{f}_3 = \underline{k}_1.$$

La matrice associata a b in questa base è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e quindi l'indice di nullità è 1, l'indice di positività è 1 e l'indice di negatività è 1.