Geometria 1. Prof. Paolo Piazza
Primo Compito Scritto. 24/06/2020

Nome e Cognome: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7 + 2	
2	6 + 2	
3	7	
4	7	
5	7	
Totale	34+4	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI DEVONO ESSERE SPENTI E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base standard e coordinate associate (x_1, x_2, x_3). Sia $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica data da $q(x_1, x_2, x_3) := 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
1. Determinare la forma bilineare simmetrica b polare di q e la sua matrice A rispetto alla base standard. Determinare gli indici di positività, negatività e nullità di b; scrivere la matrice di Sylvester di b.
2. Determinare una base di Sylvester per b (su questo punto si veda anche il testo dell'Es. 2).
3. Facoltativo. Dotiamo ora $\mathbb{R}^3$ del prodotto scalare standard $\bullet$. Sia $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore di proiezione ortogonale sul piano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Sia $\tilde{b} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare $\tilde{b}(\underline{x}, \underline{y}) := P\underline{x} \bullet \underline{y}$. Spiegare perché $\tilde{b}$ è simmetrica. Sia $\widetilde{A}$ la matrice associata a $\tilde{b}$ nella base standard.
Vero o Falso: A e $\widetilde{A}$ sono congruenti. Spiegare.

Esercizio 2.
1. Consideriamo $P^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee $[x_1, x_2, x_3]$ e la conica $\mathcal{C}$ di equazione $q(x_1, x_2, x_3) = 0$, con q il polinomio di cui all ' **Esercizio 1.**
Determinare una proiettività $\phi \in PGL_3(\mathbb{R})$ e una conica canonica $\mathcal{D}$ tali che $\mathcal{C} = \phi(\mathcal{D})$.
2. Consideriamo lo spazio euclideo E^3 con riferimento ortonormale $O\underline{i}\underline{j}\underline{k}$ e coordinate cartesiane associate (x, y, x). Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione $2xy + 2xz + 2yz = 1$. Determinare un'isometria $\psi : E^3 \to E^3$ ed una quadrica canonica $\mathcal{P}$ tale che $\mathcal{Q} = \psi(\mathcal{P})$. Di quale quadrica si tratta ?
3. Disegnare $\mathcal{Q}$.
4. Facoltativo. Determinare un piano di E^3 che intersechi $\mathcal{Q}$ secondo una circonferenza C di raggio 2.

Esercizio 3. Spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^2$ con base standard fissata. Consideriamo l'applicazione $h : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da

$$h(\begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}) := \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \end{vmatrix} H \begin{vmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \end{vmatrix}$$

con $H = \begin{vmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{vmatrix}$. Sia A la matrice $A := \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ i & -1 \end{vmatrix}$ e sia $L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'operatore lineare definito da A.
1. Spiegare perché h definisce una forma hermitiana.
2. Dimostrare che h definisce un prodotto hermitiano.
3. Stabilire se L_A è un operatore hermitiano rispetto a h.

Esercizio 4. Spazio affine numerico $A^3(\mathbb{R})$ con coordinate standard (x, y, z). Sia r la retta di parametri direttori $(2, -1, 1)$ e passante per il punto $P = (1, 0, 3)$.
1. Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per la retta r e per il punto $Q = (1, 1, 1)$.
2. Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per r e parallelo alla retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x + 3z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia $\mathcal{C}$ la cubica di $A^2(\mathbb{C})$ di equazione $f(X, Y) = X^3 + X^2 - Y^2 = 0$.
1. Sia $\mathcal{C}^*$ la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ in $P^2(\mathbb{C})$ ottenuta per omogenizzazione rispetto a X_0. Determinare l'equazione di $\mathcal{C}^*$ ed i punti all'infinito di $\mathcal{C}$.
2. Stabilire se esistono asintoti di $\mathcal{C}$ ed in caso affermativo determinarli.
3. Stabilire se fra i punti all'infinito di $\mathcal{C}$ esistono flessi di $\mathcal{C}^*$.
4. Verificare che $O[1, 0, 0]$ è un punto singolare e studiarne la natura. Scrivere in particolare l'equazione cartesiana di ogni tangente principale e la sua molteplicità d'intersezione con la curva nel punto $O[1, 0, 0]$.