Geometria 1. Prof. Paolo Piazza
Primo Compito Scritto. 24/06/2020.
SOLUZIONI.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7 + 2	
2	6 + 2	
3	7	
4	7	
5	7	
Totale	34+4	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI DEVONO ESSERE SPENTI E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base standard e coordinate associate (x_1, x_2, x_3). Sia $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica data da $q(x_1, x_2, x_3) := 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
1. Determinare la forma bilineare simmetrica b polare di q e la sua matrice A rispetto alla base standard. Determinare gli indici di positività, negatività e nullità di b; scrivere la matrice di Sylvester di b.
2. Determinare una base di Sylvester per b (su questo punto si veda anche il testo dell'Es. 2).
3. Facoltativo. Dotiamo ora $\mathbb{R}^3$ del prodotto scalare standard $\bullet$. Sia $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore di proiezione ortogonale sul piano $x_1+x_2+x_3 = 0$. Sia $\tilde{b} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare $\tilde{b}(\underline{x}, \underline{y}) := P\underline{x} \bullet \underline{y}$. Spiegare perché $\tilde{b}$ è simmetrica. Sia $\widetilde{A}$ la matrice associata a $\tilde{b}$ nella base standard.
Vero o Falso: A e $\widetilde{A}$ sono congruenti. Spiegare.

Soluzione:
la forma bilineare simmetrica polare di q è data da

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_2 + y_1x_2 + x_1y_3 + y_1x_3 + x_2y_3 + y_2x_3$$

che ha matrice associata, nella base standard $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$:

$$A_b^{\mathcal{E}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Utilizzeremo la notazione A per questa matrice. Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 1\,.$$

Dato che $\lambda = 0$ non è radice del polinomio abbiamo che b è non degenere; inoltre, utilizzando il criterio di Cartesio, possiamo subito affermare che b ha indice di positività 1 ed indice di negatività 2. Dopo aver letto il testo dell'Es. 2 capiamo che è conveniente cercare di diagonalizzare la forma bilineare simmetrica b utilizzando il teorema spettrale per l'operatore L_A, che è simmetrico rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$. Gli autovalori di L_A sono le radici del polinomio caratteristico $-\lambda^3 + 3\lambda + 1$ e quindi sono $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 1. L'autospazio $V(-1)$ ha equazione cartesiana $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e quindi $V(2)$, che è uguale a $V(-1)^\perp$, è dato dalla retta vettoriale $\mathbb{R}(1, 1, 1)$. Una base *ortonormale* di autovettori è quindi data da

$$\mathcal{G} = \{\, \underline{g}_1 := (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\,, \quad \underline{g}_2 := (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,, \quad \underline{g}_3 := (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\}\,.$$

Questa base diagonalizza simultaneamente la forma bilineare b e l'operatore L_A [1] :

$$A_b^{\mathcal{G}} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(L_A)\,.$$

Una base di Sylvester si ottiene normalizzando il primo vettore, dividendolo per $\sqrt{b(\underline{g}_1, \underline{g}_1)} = \sqrt{2}$. Una base di Sylvester è quindi

$$\mathcal{F} = \{(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})\,, \quad (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,, \quad (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\}$$

e si ha

$$A_b^{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Riguardo la parte facoltativa: sappiamo che un operatore di proiezione *ortogonale* è simmetrico e da ciò discende subito che $\tilde{b}(\ ,\ )$ è simmetrica ed è ovviamente bilineare dato che il prodotto scalare standard è bilineare simmetrico e P è lineare. Il nucleo di P è non banale; A e $\widetilde{A}$ hanno quindi ranghi diversi e non possono essere congruenti.

[1] Attenzione: la base di autovettori dell'operatore L_A va scelta ortonormale, altrimenti, salvo casi particolari, diagonalizziamo l'operatore ma non la forma bilineare simmetrica. Questo è stato un errore molto comune.

Esercizio 2.
1. Consideriamo $P^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee $[x_1, x_2, x_3]$ e la conica $\mathcal{C}$ di equazione $q(x_1, x_2, x_3) = 0$, con q il polinomio di cui all ' **Esercizio 1.**
Determinare una proiettività $\phi \in PGL_3(\mathbb{R})$ e una conica canonica $\mathcal{D}$ tali che $\mathcal{C} = \phi(\mathcal{D})$.
2. Consideriamo lo spazio euclideo E^3 con riferimento ortonormale $O\underline{i}\underline{j}\underline{k}$ e coordinate cartesiane associate (x, y, x). Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione $2xy + 2xz + 2yz = 1$. Determinare un'isometria $\psi : E^3 \to E^3$ ed una quadrica canonica $\mathcal{P}$ tale che $\mathcal{Q} = \psi(\mathcal{P})$. Di quale quadrica si tratta ?
3. Disegnare $\mathcal{Q}$.
4. **Facoltativo.** Determinare un piano di E^3 che intersechi $\mathcal{Q}$ secondo una circonferenza C di raggio 2.

Soluzione:
1. Sia M la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate del vettore f_j; allora $M^T AM = A_b^{\mathcal{F}}$; M è la matrice del cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ e quindi dette $\underline{x}'$ le coordinate associate alla base $\mathcal{F}$ si ha $\underline{x} = M\underline{x}'$. Otteniamo quindi

$$q(\underline{x}) \equiv \underline{x}^T A\underline{x} = (\underline{x}')^T M^T AM\underline{x}' = (\underline{x}')^T A_b^{\mathcal{F}} \underline{x}' = (x_1')^2 - (x_2')^2 - (x_3')^2 \, .$$

Quindi nel nuovo riferimento proiettivo fissato dalla base $\mathcal{F}$ la conica $\mathcal{C}$ ha equazione canonica.
In questo ragionamento c' è un solo piano proiettivo, ma due riferimenti proiettivi distinti. In alternativa, e questa era la domanda dell'esame, consideriamo lo stesso piano proiettivo, con un unico riferimento proiettivo, quello standard, ma con una proiettività $\phi : P^2(\mathbb{R}) \to P^2(\mathbb{R})$. Più precisamente, sia $\mathcal{D}$ la conica canonica di equazione $G = 0$ con G il polinomio omogeneo di secondo grado

$$G(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \, .$$

Sia $\mathcal{C}$ la conica di cui al punto **1**; $\mathcal{C}$ ha equazione $F = 0$, con $F(x_0, x_1, x_2) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$; sia $\phi : P^2(\mathbb{R}) \to P^2(\mathbb{R})$ la proiettività $\phi[\underline{x}] = [M\underline{x}]$; il ragionamento precedente dimostra che $F(\phi(\underline{x})) = G(\underline{x})$ e quindi $\mathcal{D} = \phi^{-1}\mathcal{C}$ o, equivalentemente, $\phi(\mathcal{D}) = \mathcal{C}$. Abbiamo risposto al punto 1.
2. Sia N la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate del vettore g_j:

$$N = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} .$$

$N \in O(3)$ perché $\mathcal{G}$ è una base ortonormale. Sia $\mathcal{P}$ la quadrica di equazione $g(x, y, z) = 0$ con

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} - y^2 - z^2 - 1$$

$\mathcal{P}$ è un iperboloide ellittico in forma canonica, si veda Sernesi. Sia $\mathcal{Q}$ la nostra quadrica, di equazione $f(x, y, z) = 0$ con $f(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz - 1$. Sia ψ l'isometria di E^3 data da $T_{N,\underline{0}}$; allora, dai ragionamenti fatti, si ha che $f \circ \psi = g$ e quindi $\psi(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$.
3. L'iperboloide ellittico si disegna ruotando la quadrica canonica $\mathcal{P}$ tramite la rotazione $T_{N,\underline{0}}$.
4. Scriviamo l'equazione di $\mathcal{P}$ nella forma $2x^2 - 1 = y^2 + z^2$. I piani $\sigma_\pm$ di equazione $x = \pm\sqrt{5/2}$ intersecano $\mathcal{P}$ secondo una circonferenza di raggio 2. Dato che ψ è un'isometria, otteniamo che $\psi(\sigma_+)$ e $\psi(\sigma_-)$ intersecano $\mathcal{Q} = \psi(\mathcal{P})$ secondo una circonferenza di raggio 2. L'equazione di $\psi(\sigma_\pm)$ si ottiene immediatamente dall'espressione di ψ oppure ragionando sul fatto che $\psi(\sigma_\pm)$ sono i piani per

$$\psi((\pm\sqrt{5/2}), 0, 0)$$

di giacitura $\mathrm{Span}(N(\underline{e}_2), N(\underline{e}_3))$ e cioè di giacitura data da $\mathrm{Span}(\underline{g}_2, \underline{g}_3)$. Conclusione: $\psi(\sigma_\pm)$ sono i piani di giacitura $\mathrm{Span}(\underline{g}_2, \underline{g}_3)$, e cioè di giacitura $V(-1)$, che ha equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, e passanti per i punti

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sqrt{5/2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} , \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\sqrt{5/2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Lascio a voi quest'ultimo conto.

Esercizio 3. Spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^2$ con base standard fissata. Consideriamo l'applicazione $h : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da

$$h(\begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}) := \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \end{vmatrix} H \begin{vmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \end{vmatrix}$$

con $H = \begin{vmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{vmatrix}$. Sia A la matrice $A := \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ i & -1 \end{vmatrix}$ e sia $L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'operatore lineare definito da A.
1. Spiegare perché h definisce una forma hermitiana.
2. Dimostrare che h definisce un prodotto hermitiano.
3. Stabilire se L_A è un operatore hermitiano rispetto a h.

Soluzione:
1. È ben noto che $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \to h(\mathbf{z}, \mathbf{w}) := \mathbf{z}^t H \overline{\mathbf{w}}$ è additiva in entrambi gli argomenti e tale che $h(\lambda \mathbf{z}, \mathbf{w}) = \lambda h(\mathbf{z}, \mathbf{w})$. Inoltre, essendo H hermitiana, $H = \overline{H}^t$, si ha anche che $h(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \overline{h(\mathbf{w}, \mathbf{z})}$. Quindi $h(\, , \,)$ è una forma hermitiana.
2. Dobbiamo dimostrare che h è definita positiva. Basta verificare che la forma di Sylvester della matrice hermitiana H è del tipo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Il metodo più rapido per matrici 2×2 consiste nel calcolare il polinomio caratteristico e verificare che gli autovalori (che sono reali, dato che H è hermitiana, ed esplicitamente calcolabili) sono entrambi positivi. Il polinomio caratteristico di H è $P_H(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 2$ che ha radici positive, quindi h è un prodotto hermitiano.
3. Denotiamo ancora una volta con $\mathbf{z}$ e $\mathbf{w}$ vettori generici di $\mathbb{C}^2$. Allora L_A è autoaggiunto rispetto a h sse $\forall \mathbf{z}, \mathbf{w}$ si ha $h(L_A \mathbf{z}, \mathbf{w}) = h(\mathbf{z}, L_A \mathbf{w})$ sse $h(A\mathbf{z}, \mathbf{w}) = h(\mathbf{z}, A\mathbf{w})$ sse $(A\mathbf{z})^t H \overline{\mathbf{w}} = (\mathbf{z})^t H \overline{A\mathbf{w}}$ sse $(\mathbf{z})^t A^t H \overline{\mathbf{w}} = (\mathbf{z})^t H \overline{A} \overline{\mathbf{w}}$. Ne deduciamo che L_A è autoaggiunto rispetto a h sse $A^t H = H\overline{A}$ e dato che un semplice conto mostra che ciò non è vero per le nostre particolari matrici, ne deduciamo che L_A **non** è autoaggiunto rispetto a h.

Esercizio 4. Spazio affine numerico $A^3(\mathbb{R})$ con coordinate standard (x, y, z). Sia r la retta di parametri direttori $(2, -1, 1)$ e passante per il punto $P = (1, 0, 3)$.
1. Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per la retta r e per il punto $Q = (1, 1, 1)$.
2. Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per r e parallelo alla retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x + 3z = 1 \end{cases}$$

Soluzione:
ci sono molti modi di risolvere questo esercizio. Eccone uno. Sia $\underline{w}_1 = (2, -1, 1)$ il vettore direttore della retta e sia $\underline{w}_2$ il vettore $\overrightarrow{PQ}$, quindi $\underline{w}_2 = (0, 1, -2)$. Un rapido ragionamento ci fa capire che stiamo cercando il piano con giacitura $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ e passante per Q ed è ben noto che questo è il piano di equazione

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Facendo i conti otteniamo il piano $x + 4y + 2z - 7 = 0$.
La seconda parte dell'esercizio è molto simile. Sia s la retta

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x + 3z = 1 \end{cases} \quad ;$$

s ha parametri direttori $\underline{w}' = (3, -1, -1)$ e se il piano è parallelo a questa retta allora la sua giacitura deve contenere questo vettore. Quindi cerchiamo il piano di giacitura $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}')$ e passante per $P = (1, 0, 3)$. A questo punto si procede come sopra e si ottiene l'equazione $2x + 5y + z - 5 = 0$.
Un altro metodo per risolvere l'esercizio era quello di scrivere il fascio di piani per r e cercare fra i piani del fascio quello che passa per Q, per la prima parte dell'esercizio, oppure, nel secondo caso, quello che ha giacitura contenente il vettore direttore di s.

Esercizio 5. Sia $\mathcal{C}$ la cubica di $A^2(\mathbb{C})$ di equazione $f(X,Y) = X^3 + X^2 - Y^2 = 0$.
1. Sia $\mathcal{C}^*$ la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ in $P^2(\mathbb{C})$ ottenuta per omogenizzazione rispetto a X_0. Determinare l'equazione di $\mathcal{C}^*$ ed i punti all'infinito di $\mathcal{C}$.
2. Stabilire se esistono asintoti di $\mathcal{C}$ ed in caso affermativo determinarli.
3. Stabilire se fra i punti all'infinito di $\mathcal{C}$ esistono flessi di $\mathcal{C}^*$.
4. Verificare che $O[1,0,0]$ è un punto singolare e studiarne la natura. Scrivere in particolare l'equazione cartesiana di ogni tangente principale e la sua molteplicità d'intersezione con la curva nel punto $O[1,0,0]$.

Soluzione. $\mathcal{C}^*$ ha equazione data dall'omegenizzato di f ruspetto a X_0 e quindi ha equazione

$$F(X_0, X_1, X_2) = X_0^{\text{grado} f} f(X_1/X_0, X_2/X_0) = X_1^3 + X_0 X_1^2 - X_0 X_2^2 = 0$$

Mettendo a sistema con l'equazione della retta H_0, la retta impropria, troviamo il punto $[0,0,1]$, che è l'unico punto improprio di $\mathcal{C}_A$. Le derivate parziali di F sono

$$F_0 = X_1^2 - X_2^2\,, \quad F_1 = 3X_1^2 + 2X_0X_1\,, \quad F_2 = -2X_0X_2$$

Il punto $[0,0,1]$ è allora semplice per $\mathcal{C}^*$, con tangente la retta impropria $\tau : X_0 = 0$. Ne segue che non esistono asintoti per $\mathcal{C}$. Si ha che $I(\mathcal{C}^*, \tau; [0,0,1]) = 3$ e quindi $[0,0,1]$ è un flesso. Ci sono (almeno) due modi di vedere che $[0,0,1]$ è un flesso e per completezza li espongo tutti e due.
Un primo modo è di applicare la definizione di molteplicità e verificare che $I(\mathcal{C}^*, \tau; [0,0,1]) = 3$: scegliamo un qualsiasi altro punto sulla retta impropria, ad esempio $[0,1,0]$ e consideriamo i punti della retta impropria in forma parametrica: $\lambda[0,0,1] + \mu[0,1,0] = [0,\mu,\lambda]$ [2]; si ha allora

$$F(0,\mu,\lambda) = \mu^3$$

e quindi la soluzione $\mu = 0$, che corrisponde al nostro punto $[0,0,1]$ ha molteplicità 3. Per definizione ciò vuol dire che $I(\mathcal{C}^*, \tau; [0,0,1]) = 3$ e quindi $[0,0,1]$ è un flesso.
Un secondo metodo consiste nello scrivere l'equazione della curva Hessiana $\mathcal{H}$ che è

$$\det \begin{vmatrix} 0 & 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_1 & 6x_1 + 2x_0 & 0 \\ -2x_2 & 0 & -2x_0 \end{vmatrix} = 0$$

e verificare che $[0,0,1] \in \mathcal{H}$.

[2] le nostre considerazioni sono indipendenti da questa scelta, si veda il discorso prima della Definizione 33.4 in Sernesi 1