**Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.**
**Geometria. Canale 3.**
**Esercizi su spazi vettoriali metrici ed hermitiani,**
**forme bilineari simmetriche, forme hermitiane.**

**Esercizio 1.** Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale metrico.
**1.** Verificare che una simmetria ortogonale $S_W$ rispetto ad un sottospazio $W \leq V$ è un operatore ortogonale in $(V, <\,,\,>)$.
**2.** Verificare che se $P$ è un operatore di proiezione *ortogonale* su un sottospazio $W$, $P \equiv P_W$, allora $P$ è simmetrico.
*Suggerimento.* Utilizzate la decomposizione **ortogonale** $V = W \oplus W^{\perp}$; per **1** dovete verificare che $||S_W \underline{v}|| = ||\underline{v}|| \ \forall \underline{v} \in V$; per **2** dovete verificare che $< P_W \underline{u}, \underline{v} >=< \underline{u}, P_W \underline{v} > \ \forall \underline{u} \in V \ \forall \underline{v} \in V$.

**Esercizio 2.** [1] Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base standard $\mathcal{E}$ e coordinate associate $(x_1, x_2, x_3)$. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base standard e coordinate associate $(x_1, x_2, x_3)$. Sia $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica data da $q(x_1, x_2, x_3) := 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
**1.** Determinare la forma bilineare simmetrica $b$ polare di $q$ e la sua matrice $A$ rispetto alla base standard.
Determinare gli indici di positività, negatività e nullità di $b$; scrivere la matrice di Sylvester di $b$.
**2.** Determinare una base di Sylvester per $b$.
**3.** Dotiamo ora $\mathbb{R}^3$ del prodotto scalare standard $\bullet$. Sia $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore di proiezione ortogonale sul piano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Sia $\tilde{b} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare $\tilde{b}(\underline{x}, \underline{y}) := P\underline{x} \bullet \underline{y}$. Spiegare perché $\tilde{b}$ è simmetrica. Sia $\widetilde{A}$ la matrice associata a $\tilde{b}$ nella base standard.
**Vero o Falso:** $A$ e $\widetilde{A}$ sono congruenti. Spiegare.

**Esercizio 3.** Consideriamo $\mathbb{R}^{2n}$ con la base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n, \underline{e}_{n+1}, \dots, \underline{e}_{2n}\}$. Sia $b : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ l'applicazione

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_{n+1} + \cdots + x_n y_{2n} - x_{n+1} y_1 - \cdots - x_{2n} y_n$$

Verificare che $b(\,,\,)$ è una forma bilineare scrivendo $b(\underline{x}, \underline{y})$ nella forma $\underline{y}^T A \underline{x}$ .
Vero o falso: $b$ è antisimmetrica e cioè $b(\underline{x}, \underline{y}) = -b(\underline{y}, \underline{x})$

**Esercizio 4.** Consideriamo lo spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^4, \bullet)$, con $\bullet$ il prodotto scalare canonico

$$\underline{x} \bullet \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 \,.$$

Fissiamo la base canonica $\mathcal{E}$.
Sia $b(\,,\,)$ la forma bilineare simmetrica definita in coordinate da

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = u_1 v_1 - u_2 v_2 + u_3 v_4 + u_4 v_3 \tag{1}$$

Abbiamo già incontrato questa forma bilineare nel compito a casa del 15/12/2023 (quindicesimo foglio). Sappiamo che $b$ è non degenere.
**1.** Utilizzando il concetto di vettore non-isotropo e di $b$-ortogonale ad un vettore non-isotropo, costruite una base $\mathcal{K} = \{\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3, \underline{k}_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\,,\,)$.

[1] Potrei aver risolto parte di questo esercizio in classe; in tal caso rifatelo autonomamente senza guardare gli appunti.

*Suggerimento.* Sappiamo che il nucleo di $b$ è banale. Cominciate quindi con il fissare un vettore non-isotropo $\underline{k}_1$; determinate poi

$$(\mathbb{R}\underline{k}_1)^{\perp_b} := \{\underline{v} \in \mathbb{R}^4 \mid b(\underline{v}, \underline{k}_1) = 0\}$$

osservando che, passando in coordinate, abbiamo facilmente un'equazione cartesiana di $(\mathbb{R}\underline{k})_1^{\perp_b}$. Scegliete $\underline{k}_2$ verificante questa equazione cartesiana. Cercate poi $\underline{k}_3$ non-isotropo che sia $b$-ortogonale sia a $\underline{k}_1$ che a $\underline{k}_2$....

**2.** Determinare a partire da $\mathcal{K}$ una base $\mathcal{F}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $A_b^{\mathcal{F}}$ sia nella forma di Sylvester.

**Esercizio 5.** Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale reale metrico. Sia $\mathcal{B}$ una base, non necessariamente ortonormale. Sia $S := A^{\mathcal{B}}_{<\,,\,>}$ la matrice associata a $<\,,\,>$ in questa base. Sia $T : V \to V$ lineare e sia $A := M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$.
Dimostrare che $T$ è un operatore ortogonale se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione $A^T S A = S$.
Dimostrare che $T$ è un operatore simmetrico se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione $SA = A^T S$.
*Suggerimento:* Considerate la definizione di $T$ ortogonale ($< T\underline{v}, T\underline{w} >=< \underline{v}, \underline{w} >$ $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$); traducete in coordinate associate a $\mathcal{B}$ questa uguaglianza....
Analogamente per $T$ simmetrico.

**Esercizio 6.** Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale hermitiano. Sia $\mathcal{B}$ una base, non necessariamente ortonormale. Siano $\mathcal{B}$, $S$, $T$ ed $A$ come sopra.
Dimostrare che $T$ è un operatore unitario se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione $A^H S A = S$ (o, equivalentemente, $A^H S = S A^{-1}$).
Dimostrare che $T$ è un operatore hermitiano se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione $SA = A^H S$.
*Suggerimento:* Scrivere le due definizioni (hermitiano e unitario) e passare in coordinate

**Esercizio 7.** Spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^2$ con base canonica fissata e prodotto hermitiano canonico. Consideriamo la forma sesquilineare $h : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da

$$h(\begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}) := \begin{vmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} \end{vmatrix} H \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

con $H = \begin{vmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{vmatrix}$. Sia $A$ la matrice $A := \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ i & -1 \end{vmatrix}$ e sia $L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'operatore lineare definito da $A$.
**1.** Dimostrare che $h$ definisce un prodotto scalare hermitiano definito positivo.
**2.** Stabilire se $L_A$ è un operatore hermitiano rispetto a $h$.

**Esercizio facoltativo.** Dimostrare il seguente risultato
**Decomposizione spettrale:** Sia $T$ un endomorfismo simmetrico di uno spazio vettoriale metrico $(V, <\,,\,>)$ o un endomorfismo hermitiano di uno spazio vettoriale hermitiano $(V, <\,,\,>)$. Diremo brevemente che $T$ è autoaggiunto. Siano $V_T(\lambda_1), \dots, V_T(\lambda_k)$ gli autospazi distinti di $T$ e sia $P_{V_T(\lambda_i)}$ l'operatore di proiezione ortogonale su $V_T(\lambda_i)$. Verificare che vale la seguente identità in End(V):

$$T = \lambda_1 P_{V_T(\lambda_1)} + \cdots + \lambda_k P_{V_T(\lambda_k)}.$$

*Suggerimento:* fissate un'opportuna base dello spazio e verificate che i due membri di questa uguaglianza operano allo stesso modo su questa base.