Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Esercizi su spazi vettoriali metrici ed hermitiani, forme bilineari simmetriche, forme hermitiane.

Esercizio 1. Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale metrico.
1. Verificare che una simmetria ortogonale S_W rispetto ad un sottospazio $W \leq V$ è un operatore ortogonale in $(V, < , >)$.
2. Verificare che se P è un operatore di proiezione *ortogonale* su un sottospazio W, $P \equiv P_W$, allora P è simmetrico.
Suggerimento. Utilizzate la decomposizione **ortogonale** $V = W \oplus W^\perp$; per **1** dovete verificare che $||S_W \underline{v}|| = ||\underline{v}|| \ \forall \underline{v} \in V$; per **2** dovete verificare che $< P_W \underline{u}, \underline{v} >=< \underline{u}, P_W \underline{v} > \ \forall \underline{u} \in V \ \forall \underline{v} \in V$.

Soluzione. 1. Sia $\underline{v} \in V$; rispetto alla decomposizione **ortogonale** $V = W \oplus W^\perp$ si ha

$$\underline{v} = \underline{v}_W + \underline{v}_{W^\perp}$$

Per definizione $S_W \underline{v} = -\underline{v}_{W^\perp} + \underline{v}_W$. Quindi

$$||S_W \underline{v}||^2 = || -\underline{v}_{W^\perp} + \underline{v}_W||^2 =< -\underline{v}_{W^\perp} + \underline{v}_W, -\underline{v}_{W^\perp} + \underline{v}_W >$$

$$=< \underline{v}_{W^\perp}, \underline{v}_{W^\perp} > -2 < \underline{v}_{W^\perp}, \underline{v}_W > + < \underline{v}_W, \underline{v}_W >$$

Ma $< \underline{v}_{W^\perp}, \underline{v}_W >= 0$ da cui

$$||S_W \underline{v}||^2 =< \underline{v}_{W^\perp}, \underline{v}_{W^\perp} > + < \underline{v}_W, \underline{v}_W > .$$

Calcoliamo ora $||\underline{v}||^2$: si ha

$$||\underline{v}||^2 =< \underline{v}, \underline{v} >=< \underline{v}_{W^\perp}, \underline{v}_{W^\perp} > +2 < \underline{v}_{W^\perp}, \underline{v}_W > + < \underline{v}_W, \underline{v}_W >$$

Ma $< \underline{v}_{W^\perp}, \underline{v}_W >= 0$ da cui

$$||\underline{v}||^2 =< \underline{v}_{W^\perp}, \underline{v}_{W^\perp} > + < \underline{v}_W, \underline{v}_W > .$$

Quindi $||S_W \underline{v}||^2 = ||\underline{v}||^2$, che è quello che si doveva verificare.
2. Siano $\underline{u}$ e $\underline{v}$ due vettori generici; rispetto alla decomposizione **ortogonale** $V = W \oplus W^\perp$ essi si scrivono come

$$\underline{u} = \underline{u}_W + \underline{u}_{W^\perp} \qquad \underline{v} = \underline{v}_W + \underline{v}_{W^\perp}$$

Allora si ha

$$< P_W \underline{u}, \underline{v} >=< \underline{u}_W, \underline{v} >=< \underline{u}_W, \underline{v}_W + \underline{v}_{W^\perp} >=< \underline{u}_W, \underline{v}_W >$$

D'altra parte:

$$< \underline{u}, P_W \underline{v} >=< \underline{u}, \underline{v}_W >=< \underline{u}_W + \underline{u}_{W^\perp}, \underline{v}_W >=< \underline{u}_W, \underline{v}_W >$$

Ne deduciamo che

$$< P_W \underline{u}, \underline{v} >=< \underline{u}, P_W \underline{v} >$$

che era quello che dovevamo dimostrare.

Esercizio 2. [1] Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base standard $\mathcal{E}$ e coordinate associate (x_1, x_2, x_3). Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base standard e coordinate associate (x_1, x_2, x_3). Sia $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica data da $q(x_1, x_2, x_3) := 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
1. Determinare la forma bilineare simmetrica b polare di q e la sua matrice A rispetto alla base standard.
Determinare gli indici di positività, negatività e nullità di b; scrivere la matrice di Sylvester di b.
2. Determinare una base di Sylvester per b.
3. Dotiamo ora $\mathbb{R}^3$ del prodotto scalare standard $\bullet$. Sia $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore di proiezione ortogonale sul piano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Sia $\tilde{b} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare $\tilde{b}(\underline{x}, \underline{y}) := P\underline{x} \bullet \underline{y}$. Spiegare perché $\tilde{b}$ è simmetrica. Sia $\widetilde{A}$ la matrice associata a $\tilde{b}$ nella base standard.
Vero o Falso: A e $\widetilde{A}$ sono congruenti. Spiegare.

Soluzione:
la forma bilineare simmetrica polare di q è data da

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_2 + y_1x_2 + x_1y_3 + y_1x_3 + x_2y_3 + y_2x_3$$

che ha matrice associata, nella base standard $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$:

$$A_b^{\mathcal{E}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Utilizzeremo la notazione A per questa matrice. Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 1\,.$$

Dato che $\lambda = 0$ non è radice del polinomio abbiamo che b è non degenere; inoltre, utilizzando il criterio di Cartesio, possiamo subito affermare che b ha indice di positività 1 ed indice di negatività 2. Vogliamo diagonalizzare la forma bilineare simmetrica b utilizzando il teorema spettrale per l'operatore L_A, che è simmetrico rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$. Gli autovalori di L_A sono le radici del polinomio caratteristico $-\lambda^3 + 3\lambda + 1$ e quindi sono $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 1. L'autospazio $V(-1)$ ha equazione cartesiana $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e quindi $V(2)$, che è uguale a $V(-1)^{\perp}$, è dato dalla retta vettoriale $\mathbb{R}(1, 1, 1)$. Una base *ortonormale* di autovettori è quindi data da

$$\mathcal{G} = \{\, \underline{g}_1 := (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\,, \quad \underline{g}_2 := (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,, \quad \underline{g}_3 := (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\}\,.$$

Questa base diagonalizza simultaneamente la forma bilineare b e l'operatore L_A [2] :

$$A_b^{\mathcal{G}} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(L_A)\,.$$

---

[1] Potrei aver risolto parte di questo esercizio in classe; in tal caso rifatelo autonomamente senza guardare gli appunti.

[2] Attenzione: la base di autovettori dell'operatore L_A va scelta ortonormale, altrimenti, salvo casi particolari, diagonalizziamo l'operatore ma non la forma bilineare simmetrica. Questo è un errore molto comune.

Una base di Sylvester si ottiene normalizzando il primo vettore, dividendolo per $\sqrt{b(\underline{g}_1, \underline{g}_1)} = \sqrt{2}$. Una base di Sylvester è quindi

$$\mathcal{F} = \{(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), \quad (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \quad (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\}$$

e si ha

$$A_b^{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Riguardo la parte facoltativa: sappiamo che un operatore di proiezione *ortogonale* è simmetrico e da ciò discende subito che $\tilde{b}(\ ,\ )$ è simmetrica ed è ovviamente bilineare dato che il prodotto scalare standard è bilineare simmetrico e P è lineare. Il nucleo di P è non banale; A e $\widetilde{A}$ hanno quindi ranghi diversi e non possono essere congruenti.

Esercizio 3. Consideriamo $\mathbb{R}^{2n}$ con la base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n, \underline{e}_{n+1}, \dots, \underline{e}_{2n}\}$. Sia $b : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ l'applicazione

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_{n+1} + \dots + x_n y_{2n} - x_{n+1} y_1 - \dots - x_{2n} y_n$$

Verificare che $b(\ ,\ )$ è una forma bilineare scrivendo $b(\underline{x}, \underline{y})$ nella forma $\underline{y}^T A \underline{x}$.
Vero o falso: b è antisimmetrica e cioè $b(\underline{x}, \underline{y}) = -b(\underline{y}, \underline{x})$

Soluzione. Possiamo verificare a mano che b è bilineare oppure, come suggerito nel testo esprimere b nella forma $b(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}^T A \underline{x}$ (una tale forma è sempre bilineare dalle proprietà del prodotto righe per colonne e dalle proprietà della trasposizione).
Calcoliamo

$$b(\underline{e}_i, \underline{e}_{i+n}) = 1 \qquad \forall i = 1, \dots, n;$$
$$b(\underline{e}_{i+n}, \underline{e}_i) = -1 \qquad \forall i = 1, \dots, n;$$
$$b(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = 0 \qquad \forall i, j = 1, \dots, 2n \quad \text{tali che } i \neq j + n \text{ e } j \neq i + n.$$

La matrice

$$A := (a_{ij}), \quad a_{ij} = b(\underline{e}_j, \underline{e}_i)$$

è quindi

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{vmatrix}$$

dove I_n denota la matrice identità $n \times n$.
È immediato verificare che

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}^T A \underline{x}$$

e quindi b è bilineare.
Rispondiamo al secondo quesito. È vero che b è antisimmetrica. Per vederlo si può fare il calcolo esplicito e trovare che $b(\underline{x}, \underline{y}) = -b(\underline{y}, \underline{x})$, oppure, preferibilmente, osservare che la matrice associata a b nella base $\mathcal{E}$ è una matrice antisimmetrica:

$$\begin{vmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}^T A \underline{x} = (\underline{y}^T A \underline{x})^T = \underline{x}^T (A)^T \underline{y} = \underline{x}^T (-A) \underline{y} = -b(\underline{y}, \underline{x}).$$

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2n}$ dotato della forma bilineare antisimmetrica b è un esempio di spazio vettoriale simplettico[3]. Gli spazi vettoriali simplettici giocano un ruolo molto importante in Fisica.

Esercizio 4. Consideriamo lo spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^4, \bullet)$, con $\bullet$ il prodotto scalare canonico
$$\underline{x} \bullet \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4\,.$$
Fissiamo la base canonica $\mathcal{E}$.
Sia $b(\;,\;)$ la forma bilineare simmetrica definita in coordinate da
$$b(\underline{u}, \underline{v}) = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_4 + u_4v_3 \tag{1}$$
Abbiamo già incontrato questa forma bilineare nel compito a casa del 15/12/2023 (quindicesimo foglio). Sappiamo che b è non degenere.
1. Utilizzando il concetto di vettore non-isotropo e di b-ortogonale ad un vettore non-isotropo, costruite una base $\mathcal{K} = \{\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3, \underline{k}_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\;,\;)$.
Suggerimento. Sappiamo che il nucleo di b è banale. Cominciate quindi con il fissare un vettore non-isotropo $\underline{k}_1$; determinate poi
$$(\mathbb{R}\underline{k}_1)^{\perp_b} := \{\underline{v} \in \mathbb{R}^4 \;\mid\; b(\underline{v}, \underline{k}_1) = 0\}$$
osservando che, passando in coordinate, abbiamo facilmente un'equazione cartesiana di $(\mathbb{R}\underline{k})_1^{\perp_b}$. Scegliete $\underline{k}_2$ verificante questa equazione cartesiana. Cercate poi $\underline{k}_3$ non-isotropo che sia b-ortogonale sia a $\underline{k}_1$ che a $\underline{k}_2$....

2. Determinare a partire da $\mathcal{K}$ una base $\mathcal{F}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $A_b^{\mathcal{F}}$ sia nella forma di Sylvester.

Soluzione
Ricordiamo che per definizione
$$b(\underline{u}, \underline{v}) = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_4 + u_4v_3$$
e quindi
$$b(\underline{u}, \underline{u}) = (u_1)^2 - (u_2)^2 + 2u_3u_4\,.$$
Determiniamo una base diagonalizzante $\mathcal{K}= \{\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3, \underline{k}_4\}$ per $b(\;,\;)$, ci occuperemo poi di passare dalla forma diagonale alla forma di Sylvester. Osserviamo preliminarmente che questi 4 vettori dovranno essere non isotropi dato che $rg(b) = 4$. Per costruire $\mathcal{K}$ ci ispiriamo al procedimento induttivo che ci ha permesso di dimostrare, in generale, l'esistenza di basi diagonalizzanti per una qualsiasi forma bilineare simmetrica. Denotiamo con $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_4)$ una 4-pla in $\mathbb{R}^4$. Partiamo da un vettore non isotropo $\underline{k}_1$. Ad esempio il vettore $\underline{k}_1 = (1, 1, 1, 1)$ per il quale si ha $b(\underline{k}_1, \underline{k}_1) = 1 - 1 + 2 = 2 \neq 0$. Consideriamo il sottospazio b-ortogonale a $\underline{k}_1$. Questo è il sottospazio
$$\{\underline{u} \in \mathbb{R}^4 \,|\, b(\underline{u}, (1, 1, 1, 1)) = 0\} = \{(u_1, u_2, u_3, u_4) \,|\, u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0\}$$
Scegliamo il secondo vettore $\underline{k}_2$ della base diagonalizzante in questo sottospazio e non isotropo. Ad esempio il vettore $\underline{k}_2 = (1, 1, 1, -1)$ che verifica l'equazione trovata ed è tale che $b(\underline{k}_2, \underline{k}_2) = -2$.
Il terzo vettore $\underline{k}_3$ della base diagonalizzante va cercato fra i vettori non isotropi

[3]Uno spazio vettoriale simplettico è una coppia (V, b) con b una forma bilineare antisimmetrica non-degenere

che verificano simultaneamente

$$\begin{cases} b(\underline{u},(1,1,1,1)) = 0 \\ b(\underline{u},(1,1,1,-1)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\ u_1 - u_2 - u_3 + u_4 = 0 \end{cases}$$

Il vettore $\underline{k}_3 = (1,0,0,-1)$ verifica entrambe queste equazioni; inoltre $b(\underline{k}_3,\underline{k}_3) = 1$ e quindi $\underline{k}_3$ è non-isotropo.
Rimane da determinare il quarto vettore: deve essere non isotropo e b-ortogonale a $\underline{k}_1,\underline{k}_2,\underline{k}_3$. Il vettore $\underline{k}_4$ va allora cercato nel sottospazio dei vettori $\underline{u} \in \mathbb{R}^4$ che verificano simultaneamente

$$\begin{cases} b(\underline{u},(1,1,1,1)) = 0 \\ b(\underline{u},(1,1,1,-1)) = 0 \\ b(\underline{u},(1,0,0,-1)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\ u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0 \\ u_1 - u_3 = 0 \end{cases}$$

Una soluzione di questo sistema è data dal vettore $\underline{k}_4 = (1,2,1,0)$; inoltre $b(\underline{k}_4,\underline{k}_4) = -3$.
Se $\mathcal{K}$ è la base $\{\underline{k}_1,\ldots,\underline{k}_4\}$ si ha quindi

$$A_b^{\mathcal{K}} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

Questo vuol dire che $\mathcal{K}$ è una base diagonalizzante come richiesto. Notare che questa base **non** è diagonalizzante per L_A; ad esempio $\underline{k}_1$ non è un autovettore.
La base $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1 := \frac{k_1}{\sqrt{2}}; \quad \underline{f}_2 := \underline{k}_3; \quad \underline{f}_3 := \frac{k_2}{\sqrt{2}}; \quad \underline{f}_4 := \frac{k_4}{\sqrt{3}}\}$ fornisce allora la matrice del teorema di Sylvester:

$$A_b^{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 5. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale reale metrico. Sia $\mathcal{B}$ una base, non necessariamente ortonormale. Sia $S := A^{\mathcal{B}}_{<\,,\,>}$ la matrice associata a $<\,,\,>$ in questa base. Sia $T : V \to V$ lineare e sia $A := M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$.
Dimostrare che T è un operatore ortogonale se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione $A^T S A = S$.
Dimostrare che T è un operatore simmetrico se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione $SA = A^T S$.
Suggerimento: Considerate la definizione di T ortogonale ($< T\underline{v}, T\underline{w} >=< \underline{v},\underline{w} >$ $\forall \underline{v},\underline{w} \in V$); traducete in coordinate associate a $\mathcal{B}$ questa uguaglianza....
Analogamente per T simmetrico.

Soluzione. T ortogonale vuol dire

$$< T\underline{v}, T\underline{w} >=< \underline{v},\underline{w} > \qquad \forall \underline{v},\underline{w} \in V.$$

Passiamo a coordinate: se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{x}$ e $\underline{w}$ ha coordinate $\underline{y}$, questa uguaglianza si riscrive come

$$(A\underline{y})^T S (A\underline{x}) = \underline{y}^T S \underline{x},$$

che equivale a

$$\underline{y}^T A^T S A \underline{x} = \underline{y}^T S \underline{x}.$$

Per arbitrarietà di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ l'uguaglianza vale se e solo se

$$A^T S A = S$$

che è equivalente a $A^T S = S A^{-1}$.
T simmetrico vuol dire

$$< T\underline{v}, \underline{w} > = < \underline{v}, T\underline{w} > \qquad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{x}$ e $\underline{w}$ ha coordinate $\underline{y}$ otteniamo che T è simmetrico se e solo se

$$\underline{y}^T S(A\underline{x}) = (A\underline{y})^T S\underline{x}$$

che riscriviamo come

$$\underline{y}^T S(A\underline{x}) = (\underline{y})^T A^T S\underline{x}$$

Per arbitrarietà di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ l'uguaglianza vale se e solo se

$$SA = A^T S\,.$$

Esercizio 6. Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale hermitiano. Sia $\mathcal{B}$ una base, non necessariamente ortonormale. Siano $\mathcal{B}$, S, T ed A come sopra.
Dimostrare che T è un operatore unitario se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione $A^H S A = S$ (o, equivalentemente, $A^H S = S A^{-1}$).
Dimostrare che T è un operatore hermitiano se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione $SA = A^H S$.

Suggerimento: Scrivere le due definizioni (hermitiano e unitario) e passare in coordinate

Dimostrazione. Per definizione T è un operatore unitario se e solo se

$$< T\underline{v}, T\underline{w} > = < \underline{v}, \underline{w} > \qquad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Questa condizione è equivalente a

$$(A\underline{y})^H S(A\underline{x}) = \underline{y}^H S\underline{x}, \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

e cioè, esplicitamente,

$$\overline{(A\underline{y})^T} S(A\underline{x}) = \overline{\underline{y}}^T S\underline{x}, \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

che equivale a

$$\overline{\underline{y}}^T A^H S A\underline{x} = \overline{\underline{y}}^T S\underline{x}, \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Per l'arbitrarietà di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ otteniamo che T è unitario se e solo se $A^H S A = S$ o, equivalentemente, $A^H S = S\overline{A}^{-1}$. La dimostrazione del risultato per T hermitiano è del tutto analoga a quella per T simmetrico.

Esercizio 7. Spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^2$ con base canonica fissata e prodotto hermitiano canonico. Consideriamo la forma sesquilineare $h : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definita da

$$h(\begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}) := \begin{vmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} \end{vmatrix} H \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

con $H = \begin{vmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{vmatrix}$. Sia A la matrice $A := \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ i & -1 \end{vmatrix}$ e sia $L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'operatore lineare definito da A.

1. Dimostrare che h definisce un prodotto scalare hermitiano definito positivo.
2. Stabilire se L_A è un operatore hermitiano rispetto a h.

Soluzione:
1. Dato che H è hermitiana si ha che h è un prodotto scalare hermitiano. Dobbiamo dimostrare che h è definito positiva. Basta verificare che la forma di Sylvester della matrice hermitiana H è del tipo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Il metodo più rapido per matrici 2×2 consiste nel calcolare il polinomio caratteristico e verificare che gli autovalori (che sono reali, dato che H è hermitiana, ed esplicitamente calcolabili) sono entrambi positivi. Il polinomio caratteristico di H è $P_H(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 2$ che ha radici positive, quindi h è un prodotto scalare hermitiano.
2. Denotiamo con $\mathbf{z}$ e $\mathbf{w}$ vettori generici di $\mathbb{C}^2$. Allora L_A è autoaggiunto rispetto a h se e solo se $\forall \mathbf{z}, \mathbf{w}$ si ha $h(L_A\mathbf{z}, \mathbf{w}) = h(\mathbf{z}, L_A\mathbf{w})$ e sappiamo che questo è vero se e solo se $HA = \overline{A^T} H$; dato che un semplice conto mostra che ciò non è vero per le nostre particolari matrici, ne deduciamo che L_A **non** è hermitiano rispetto a h.

Esercizio facoltativo. Dimostrare il seguente risultato
Decomposizione spettrale: Sia T un endomorfismo simmetrico di uno spazio vettoriale metrico $(V, <\,,\,>)$ o un endomorfismo hermitiano di uno spazio vettoriale hermitiano $(V, <\,,\,>)$. Diremo brevemente che T è autoaggiunto. Siano $V_T(\lambda_1), \ldots, V_T(\lambda_k)$ gli autospazi distinti di T e sia $P_{V_T(\lambda_i)}$ l'operatore di proiezione ortogonale su $V_T(\lambda_i)$. Verificare che vale la seguente identità in End(V):

$$T = \lambda_1 P_{V_T(\lambda_1)} + \cdots + \lambda_k P_{V_T(\lambda_k)}.$$

Suggerimento: fissate un'opportuna base dello spazio e verificate che i due membri di questa uguaglianza operano allo stesso modo su questa base.
Soluzione. Poiché T è autoaggiunto, T ha tutti gli autovalori reali ed è diagonalizzabile tramite una base ortonormale di autovettori. Sia $\{\underline{u}_{11}, \ldots, \underline{u}_{1d_1}, \ldots, \underline{u}_{k1}, \ldots, \underline{u}_{kd_k}\}$ una base ortonormale di autovettori con $\{\underline{u}_{i1}, \ldots, \underline{u}_{id_i}\}$ base ortonormale di $V_T(\lambda_i)$.
Segue che

$$P_{V_T(\lambda_j)}\underline{u}_{ih} = \begin{cases} \underline{u}_{ih} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Quindi si ha

$$(\lambda_1 P_{V_T(\lambda_1)} + \cdots + \lambda_k P_{V_T(\lambda_k)})(\underline{u}_{ih}) = \lambda_i \underline{u}_{ih}.$$

Anche $T(\underline{u}_{ih}) = \lambda_i \underline{u}_{ih}$ poichè $\underline{u}_{ih} \in V_T(\lambda_i)$.
Dato che T e $\lambda_1 P_{V_T(\lambda_1)} + \cdots + \lambda_k P_{V_T(\lambda_k)}$ assumono gli stessi valori su una base di V ne segue che sono uguali in End(V).