Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 15/12/23.

Forme bilineari simmetriche

Esercizio 1. Consideriamo lo spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^4, \bullet)$, con $\bullet$ il prodotto scalare canonico

$$\underline{x} \bullet \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \,.$$

Fissiamo la base canonica $\mathcal{E}$.
Sia $b(\,,\,)$ la forma bilineare simmetrica definita in coordinate da

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_4 + u_4v_3 \tag{1}$$

1. Scrivere la matrice associata a $b(\,,\,)$ nella base canonica, $A_b^{\mathcal{E}}$.
Verificare che $b(\,,\,)$ è non degenere.

2. Definire a partire da $b(\,,\,)$ un endomorfismo simmetrico T in $(\mathbb{R}^4, \bullet)$.

3. Determinare indice di positività ed indice di negatività di b.

4. Trovare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ costituita da autovettori per T.

5. Determinare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ rispetto alla quale $b(\,,\,)$ si scriva in forma diagonale. In altre parole, determinare una base ortonormale $\mathcal{H}$ di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ tale che $A_b^{\mathcal{H}}$ sia diagonale. Determinare una base di Sylvester e cioè una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $A_b^{\mathcal{B}}$ sia nella forma di Sylvester.

6. Facoltativo.
Determinare una base $\mathcal{G}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi l'operatore T ma *non* diagonalizzi la forma $b(\,,\,)$. *Suggerimento.* Sicuramente dovete fissare una base $\mathcal{G}$ di autovettori per T; come andranno scelti questi autovettori per essere tali da *non* diagonalizzare $b(\,,\,)$?

7 Un vettore $\underline{v}$ è detto isotropo per una forma bilineare simmetrica $b(\,,\,)$ se vale $b(\underline{v}, \underline{v}) = 0$.
Vero o Falso: *dato che b è non-degenere, non esistono vettori isotropi.*

8. Determinare equazioni cartesiane di due sottospazi W_+ e W_- tali che la restrizione di b a W_+ (rispettivamente W_-) sia definita positiva (risp. negativa).

Spazi vettoriali metrici

Osservazione. Dato uno spazio vettoriale metrico $(V, <\,,\,>)$ ed un sottospazio $U \leq V$ abbiamo visto che esiste una decomposizione in somma diretta

$$V = U \oplus U^{\perp}.$$

Abbiamo definito la proiezione ortogonale su U, P_U, nel modo seguente: se $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r\}$ è una base ortonormale di U allora

$$P_U(\underline{v}) := <\underline{v}, \underline{u}_1> \underline{u}_1 + \cdots + <\underline{v}, \underline{u}_r> \underline{u}_r \,, \quad \underline{v} \in V \,.$$

Abbiamo visto [1] che P_U è la proiezione su U parallelamente ad $U^{\perp}$ rispetto alla decomposizione $V = U \oplus U^{\perp}$. Analogamente la proiezione ortogonale su $U^{\perp}$, $P_{U^{\perp}}$,

[1] era un esercizio del compito del 14/12

risulta essere uguale alla proiezione su $U^\perp$ parallelamente a U. Possiamo allora anche definire la simmetria ortogonale rispetto a U, denotata S_U; questa è, per definizione, la simmetria rispetto ad U parallelamente ad $U^\perp$. Analogamente possiamo definire la simmetria ortogonale rispetto a $U^\perp$ (e cioè la simmetria rispetto a $U^\perp$ parallelamente a U).
Rivedete le relazioni che intercorrono fra questi 4 operatori (Quinto foglio di esercizi, del 24/10/2023). Se U è un iperpiano allora S_U è spesso chiamata la *riflessione* rispetto a U.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico. È dato il piano σ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1, -1, 0, 0) \qquad \underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$$

- Sia P_σ l'operatore di proiezione ortogonale sul piano σ. Determinare la matrice associata a P_σ nella base canonica (quindi: base di partenza = base di arrivo = base canonica).
- Determinare la matrice associata nella base canonica all'operatore di proiezione ortogonale sul piano $\sigma^\perp$.

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^6, \bullet)$ e sia U l'iperpiano di equazioni

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

Determinare la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^6$ all'operatore di proiezione ortogonale su U.
Determinare la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^6$ all'operatore di simmetria ortogonale rispetto a U.
Suggerimento: siate furbe/i, proiettare ortogonalmente su una retta è più semplice che proiettare ortogonalmente su un sottospazio di dimensione 5.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2. Fissiamo la base standard $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ con coordinate associate (x_0, x_1, x_2) e consideriamo il prodotto scalare definito positivo

$$< P, Q >:= \int_{-1}^{1} P(s)Q(s)ds$$

Consideriamo il vettore $1-X$ e la retta $\mathbb{R}(1-X)$. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio $(\mathbb{R}(1-X))^\perp$.
Suggerimento: l'ortogonale di una retta in V è un piano, perché V ha dimensione 3; ci aspettiamo quindi una sola equazione $\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 = 0$.